Corrigé CC1 AMD

Exo 1

1) $\underline{a}\,\underline{b}\,5$. Il faut choisir a et b parmi $\{1, 3, 7, 9\}$ en $\binom{4}{2}$ façons, qu'il faut multiplier par 2 car l'ordre des chiffres compte. Donc $\binom{4}{2} \times 2 = 12$.

2) $\binom{20}{11} \times \binom{9}{5}$

On choisit d'abord les joueurs de foot et ensuite le 5 basketteurs parmi les 9 étudiants qui restent.

3) On utilise inclusion/exclusion.

On pose $A_i = \{ n \leq 70 \mid i \text{ divise } n \}$.

$70 = 2 \times 5 \times 7$ factorisation en nombres premiers.

$A_2 \cup A_5 \cup A_7$ est l'ensemble des nombres ≤ 70 qui ne sont pas premie[rs] avec 70

On veut compter le cardinal du complément de cet ensemble. Par I/E on a

$$|A_2 \cup A_5 \cup A_7| = |A_2| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7|.$$

Or $|A_2| = \frac{70}{2} = 35$ $\quad |A_2 \cap A_5| = \frac{70}{10} = 7$

$|A_5| = \frac{70}{5} = 14$ $\quad |A_2 \cap A_7| = \frac{70}{14} = 5$

$$|A_7| = \frac{70}{7} = 10 \qquad |A_5 \cap A_7| = \frac{70}{35} = 2$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 1 .$$

D'où $|A_2 \cup A_5 \cup A_7| = 46$ et

$$|(A_2 \cup A_5 \cup A_7)^c| = 70 - 46 = 24.$$

4) $$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\binom{n+1}{k+1}$ = # sous-ensembles de $[n+1]$ de cardinal $k+1$

On peut partitionner cet ensemble selon l'element plus grand qui apparait dans le sous-ensemble. Ce max vaut au minimum $k+1$ (qui correspond à l'unique s.ensemble $\{1, 2, \dots k+1\}$ et à $i = k$) et au maximum $n+1$ (qui correspond à $i = k$).
Il est clair que chaque fois on a choisi l'element max $i+1$ du sous-ensemble il faut le completer en $\binom{i}{k}$ - façons.
Il faut choisir les restants k élément dans l'ensemble $\{1, 2, \dots i\}$ ▨

EXO2 soit $f : [n] \longrightarrow [n]$; $f^2 = f$

et soit $y \in Im(f)$. Alors il existe $x \in [n]$: $f(x) = y$. On a $f^2(x) = f(x) = y$

$$f \circ f(x) = f(y)$$

$\Rightarrow \forall y \in Im(f)$ est un point fixe de f.
Les autres points ne sont pas fixes et ont comme image un points quelconque dans $Im(f)$.
Donc on choisit d'abord le cardinal de l'image $i = |Im(f)|$.
Il y a $\binom{n}{i}$ possibilité pour choisir un tel ensemble.
Ensuite pour chacun de $n-i$ points qui restent, on a i choix pour son image
Cela donne $i^{(n-i)}$ possibilités.
Comme le cardinal de l'image varie de 1 à n on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} i^{(n-i)} \binom{n}{i} \text{ telles fonctions}$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{EXO3}}$

1) $a \equiv b\ [n] \Rightarrow a + tn = b \quad t \in \mathbb{Z}$
d'où $(a+tn)^k = b^k$. On applique le formule du binôme de Newton :

$$(a+tn)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i (tn)^{k-i} = \underbrace{a^k}_{i=k} + n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot t (t$$

$$\equiv a^k\ [n].$$

2) Non. Voici un contre-exemple.

$k=2 \quad a^2 = 25 \quad b^2 = 16$

$25 \equiv 16\ [9]$ mais $5 \not\equiv 4\ [9]$.

3) 2019 est divisible par 3 car la

2019 est divisible par 3 car la somme de ses chiffre est 12 divisible par 3

$\Rightarrow 2019 \equiv 0\ [3] \Rightarrow 2019^{2019} \equiv 0\ [3]$

$2019 \equiv -1\ [5]$ Donc

$2019^{2019} \equiv (-1)^{2019} \equiv -1\ [5] \equiv 4\ [5]$

$\boxed{\text{EXO4}}$

1) $k\binom{p}{k} = k \cdot \dfrac{p!}{(p-k)!\,k!} = \dfrac{\cancel{k} \cdot p \cdot (p-1)!}{(p-k)! \cdot \cancel{k} \cdot (k-1)!}$

$= p \cdot \dfrac{(p-1)!}{(p-k)!\,(k-1)!} = p\binom{p-1}{k-1}$

$\Rightarrow p \mid k\binom{p}{k}$ mais $\text{pgcd}(p,k) = 1.$

$\Rightarrow p \mid \binom{p}{k} \quad \forall\ k = 1, \dots, p-1$

2) $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$

$\equiv a^p + b^p\ [p]$

car pour le point précédent $\binom{p}{k} \equiv 0\ [p]$

3) $a = 1 \qquad 1^p - 1 \equiv 0\ [p]$ vrai.

On suppose le resultat vrai pour a et on le montre pour a+1. Or

$(a+1)^p \equiv a^p + 1^p\ [p]$ pour le point 2

$\equiv a + 1\ [p]$ par récurrence

donc on a fini.

4) On utilise le résultat précédent $a^{p-1} \equiv 1 \; [p]$, avec $p = 11$.

$$2019 \equiv 6 \; [11]$$

$$2019^{2019} \equiv 6^{2019} \; [11] \equiv (6^{10})^{201+9} \; [11]$$

$$\equiv 6^{9} \; [11]$$

or $6^2 \equiv 3 \; [11]$ d'où

$$6^9 \equiv (6^2)^4 \cdot 6 \; [11]$$

$$\equiv 3^4 \cdot 6 \; [11]$$

or $3^2 \equiv -2 \; [11]$ d'où

$$3^4 \cdot 6 \equiv 4 \cdot 6 \; [11] \equiv 2 \; [11].$$

On a donc $2019^{2019} \equiv 2 \; [11]$ $\blacksquare$