Correction du CC2 du 8 décembre 2020

8 décembre 2020

Exercice 1.

Dire que a, b et c sont des points fixes de f revient à dire que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Maintenant, g est deux fois dérivable sur I comme somme de deux fonctions deux fois dérivables sur I, donc en particulier :

— *g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus, $g(a) = g(b)$.*

— *g est continue sur $[b, c]$, dérivable sur $]b, c[$. De plus, $g(b) = g(c)$.*

D'après le théorème de Rolle, on dispose donc de $x_1 \in]a, b[$ et $x_2 \in]b, c[$ tels que $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$.

On recommence : g' étant dérivable sur I, en particulier g' est continue sur $[x_1, x_2]$, dérivable sur $]x_1, x_2[$. De plus, $g'(x_1) = g'(x_2)$.

Par conséquent, le théorème de Rolle assure l'existence de $x \in]x_1, x_2[\subset]a, c[$ tel que $g''(x) = 0$.

Or, $f''(x) = g''(x)$, et donc $f''(x) = 0$.

Exercice 2.

1) *On a, lorsque $n \to +\infty$:*

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right), \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ &= \frac{3}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \\ &\sim \frac{3}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Or, la série de terme général $\frac{3}{2\sqrt{n}}$ est à termes positifs et est une série de Riemann divergente.

On en déduit que la série de terme général (u_n) diverge.

2) *On a, lorsque $n \to +\infty$,*

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}, \\ &= e^{n\left(\frac{a}{n}-\frac{a^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}, \\ &= e^{a-\frac{a^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}, \\ &= e^a e^{-\frac{a^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}, \\ &= e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1}e^a &= e^a \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}}, \\ &= e^a\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_n = e^a\left(\frac{1-a^2/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Il y a alors deux cas : si $a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, alors $a^2 = 2$ et donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison avec la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge absolument, donc converge.

Sinon, on a : $u_n \sim \frac{e^a(1-a^2/2)}{n}$. Par conséquent, (u_n) est à termes tous positifs ou tous négatifs à partir d'un certain rang, et comparaison avec une série de Riemann divergente, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Exercice 3 (Méthode de Newton)**.**

1) a) *f est continue sur $[a,b]$ et $0 \in [f(a), f(b)]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Comme $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, α ne peut pas être égal à a ou b, et donc $\alpha \in]a,b[$.*

b) *$|f''|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc y admet un maximum d'après le théorème des bornes. De même, f' continue sur le segment $[a,b]$ admet un minimum, et on dispose de $u \in [a,b]$ tel que $f'(u) = \min\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$. Comme $f' > 0$ sur $[a,b]$, on a en particulier $f'(u) > 0$, d'où le résultat.*

c) *On applique donc la formule de Taylor-Lagrange à f entre α et x à l'ordre 2. Plus précisément, f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\min(\alpha,x), \max(\alpha,x)]$, il existe $z \in]\min(\alpha,x), \max(\alpha,x)[$ tel que :*

$$f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha-x)^2}{2}f''(z) \tag{1}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}F(x) - \alpha &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha, \\ &= \frac{(x-\alpha)f'(x) - f(x)}{f'(x)}.\end{aligned}$$

Mais, comme $f(\alpha) = 0$, on a d'après (1) : $(x-\alpha)f'(x) - f(x) = \frac{(\alpha-x)^2}{2}f''(z)$. Finalement, on a bien :

$$F(x) - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-\alpha)^2.$$

d) *Par inégalité triangulaire, il en découle que que :*

$$\forall x \in [a,b], \qquad |F(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|f''(z)|}{|f'(x)|}|x-\alpha|^2 \leqslant \frac{C}{2}|x-\alpha|^2,$$

car $|f'(x)| = f'(x)$ et par définition de C. Or, étant donné que $|x-\alpha| \leqslant |a-b| \leqslant 1$, on a $|x-\alpha|^2 \leqslant |x-\alpha|$ d'où le résultat.

2) *a)* *Le résultat se montre par récurrence : au rang $n = 0$, il est clairement vrai.*
Si maintenat le résultat est vrai au rang n pour un certain $n \in \mathbf{N}$, en remplaçant x par u_n dans la relation de la question 1c), il vient :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{C}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{C}{2} \times \left(\frac{C}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{C}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

D'où l'hérédité, puis le résultat, par récurrence.

b) *Comme $0 \leqslant \frac{C}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{C}{2}\right)^n = 0$, donc, par encadrement, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers α.*

Exercice 4.

Méthode 1 : *par caractérisation séquentielle. Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers un certain $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(x_n, y_n) \in A$, on a : $x_n y_n = 1$. Or, par produit de limites, la suite $(x_n y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, et ce vers xy. Par passage à la limite, on en déduit $xy = 1$ et donc $(x, y) \in A$.*

Méthode 2. *On remarque que $A = f^{-1}(\{1\})$ où $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto xy$ est continue car polynomiale. Comme le singleton $\{1\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$, il en découle que A est fermée dans $\mathbf{R}^2$.*