Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement 20 Octobre 2020. Durée : 1 h 30

Partiel n^o 1

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ où $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{B \subset \mathbb{N}\}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}; n \notin f(n)\}$.

1. Montrer que $A \notin Imf$.

   Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = A$. Deux cas

   i. $k \in f(k) = A$ absurde car dans ce cas par définition de A, $k \notin f(k)$.

   ii. $k \notin f(k) = A$ absurde car pareil par définition de A, on aura $k \in f(k) = A$.

   On déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) \neq A$ càd $A \notin Imf$.

2. En déduire que f n'est pas surjective.

   $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $A \notin Imf$ alors $Imf \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et par site f n'est pas surjective.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire suivante : $x\mathcal{R}y \iff \exists\, n \in \mathbb{Z};\ y = 2^n x$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

   i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x = 2^0 x$ et donc $x\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}$ est réflexive.

   ii) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{R}y$. Montrons que $y\mathcal{R}x$. Comme $x\mathcal{R}y$, il existe alors $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2^n x$ et on a donc $x = 2^{-n} y$ avec $m = -n \in \mathbb{Z}$. Par suite $y\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}$ est symétrique.

   iii) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Montrons que $x\mathcal{R}z$. On a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, il existe alors $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2^{n_1} x$ et $z = 2^{n_2} y$. On a alors $z = 2^{n_1+n_2} x$ et donc $x\mathcal{R}z$ et $\mathcal{R}$ est transitive.

   Par suite, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la classe d'équivalence de x qu'on note $\overline{x}$ est dénombrable.

   Notons que pour $x = 0$, $y\mathcal{R}0 \iff y = 0$ et donc $\overline{0} = \{0\}$.

   Pour $x \neq 0$, $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R}; x\mathcal{R}y\} = \{y \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{Z}; y = 2^n x\} := A_x$. On vérifie facilement que

$$\begin{array}{cccc} f & : & A_x & \to & \mathbb{Z} \\ & & 2^n x & \mapsto & n \end{array}$$

   est bijective. Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$, on déduit que A_x est dénombrable.

Exercice 3. Trouver la borne inférieure et la borne supérieure de

1. $A = \{2 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} = \{u_n\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

   Pour tout $n = 2k$ pair $k \geq 1$ on a $2 \leq u_n = 2 + \frac{1}{2k} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

   Pour tout $n = 2k + 1$ impair, $k \geq 0$, $1 \leq u_n = 2 - \frac{1}{2k+1} \leq 2$.

   Par suite pour tout $n \in N^*$, $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ et donc 1 est un minorant de A et $\frac{5}{2}$ est un majorant de A.

   Comme $1 = u_1$, 1 est donc la borne inf de A (c'est en fait le minimum) et de même comme $u_2 = \frac{5}{2}$ alors $\frac{5}{2}$ est donc la borne sup de A (c'est en fait le maximum).

   Par suite $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$ et $\inf A = \min A = 1$.

2. $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + x - 1 \geq 0\}$.
   Les racines de $x^2 + x - 1$ sont donc $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et donc

$$x^2 + x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, x_1] \cup]x_2, +\infty[.$$

   Par suite $B =]-\infty, x_1] \cup]x_2, +\infty[$ et donc $\inf B = -\infty$ (B non minorée) et $\sup B = +\infty$ (B pas majorée).

Exercice 4. Etudier la convergence et chercher dans le cas échéant les limites des suites suivantes $(u_n)_n$ où :

1. $u_n = \frac{5^n + n^{100}}{3^n + 5}$
   On a $5^n + n^{100} \sim_{+\infty} 5^n$ car $\frac{(5^n + n^{100})}{5^n} = 1 + \frac{n^{100}}{e^{n \ln 5}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1 + 0 = 1$ par croissance comparée.
   D'autre part, $3^n + 5 \sim_{+\infty} 3^n$, et donc $u_n \sim_{\infty} (\frac{5}{3})^n = v_n$.
   Comme $v_n = (\frac{5}{3})^n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ car $\frac{5}{3} > 1$, alors $\lim\limits_n u_n = +\infty$ aussi et par suite la suite $(u_n)_n$ est divergente.
2. $u_n = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$
   On a $u_n = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}$. On a $\lim\limits_n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ par croisssance comparée. Par suite, par continuité de l'application exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_n u_n = e^0 = 1$ et donc $(u_n)_n$ converge vers 1.
3. $u_n = n^{(-1)^n}$.
   $u_{2k} = 2k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ et $u_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$.
   On a $\lim\limits_k u_{2k} = +\infty \neq 0 = \lim\limits_k u_{2k+1}$, par suite $(u_n)_n$ n'admet pas de limite et donc la suite diverge.

Exercice 5. On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ croissante convergeant vers l et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par $v_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1. a. Montrer que $v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_n \\ &= \frac{u_n}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= u_n \end{aligned}$$

   où on a utilisé le fait que $(u_n)_n$ est croissante et donc $u_k \leq u_n$ pour tout $k = 1, ..., n$.
   b. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n}{n+1}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k} \\
&= \frac{n}{n+1}(1+\frac{u_{n+1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}) \\
&\geq \frac{n}{n+1}(1+\frac{1}{n}) \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

où on a utlisé le fait que $v_n \leq u_n \leq u_{n+1}$ dans la minoration. Par suite, $v_{n+1} \geq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissant

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$. On a

$$
\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k \\
&= \frac{1}{2n}(nv_n + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k) \\
&\geq \frac{1}{2n}(nv_n + u_n\sum_{k=n+1}^{2n} 1) \\
&= \frac{1}{2}(nv_n + nu_n) \\
&= \frac{1}{2}(v_n + u_n)
\end{aligned}
$$

3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l. On a $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle croissante donc admet une limite $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
D'après 1) $v_n \leq u_n$ pour tout n, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient $\alpha \leq l$. D'autre part, en passant à la limite dans l'inégalité de 2), on a $\lim_n v_{2n} \geq \dfrac{1}{2}(\lim_n u_n + \lim_n v_n)$ et donc $\alpha \geq \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}l$. On a donc $\alpha(1-\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}l$ ce qui nous donne $\alpha \geq l$.
On a donc montré que $\alpha = l$ et donc que $\lim_n v_n = \lim_n u_n = l$.

Exercice 6. Soit $E = C^1([-1;1],\mathbb{R}) := \{f : [-1;1] \to \mathbb{R}; f \text{ dérivable sur } [-1;1] \text{ et } f' \text{ continue }\}$.
On considère l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)|.$$

Montrer que N est une norme sur E.

On a pour tout $f \in E$, $0 \leq N(f) < +\infty$ car f' est continue sur $[-1,1]$ et donc bornée sur $[-1,1]$. N est bien donc une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

1. $N(f) = 0 \iff |f(0)| = 0$ et $\sup\limits_{t\in[-1,1]} |f'(t)| = 0 \iff f(0) = 0$ et $f' = 0$ sur $[-1,1] \iff f(0) = 0$ et $f = C$.
   Par suite $N(f) = 0 \iff f = C = f(0) = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ and $f \in E$

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= |\lambda f(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda f'(t)| \\ &= |\lambda|\,|f(0)| + |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)| \\ &= |\lambda| N(f) \end{aligned}$$

   où on a utilisé le fait que $|\lambda| \geq 0$ dans la deuxième égalité.

3. Soit $f, g \in E$, on a

$$N(f+g) = |(f+g)(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |(f'+g')(t)|.$$

   Or pour tout $t \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} |(f'+g')(t)| &\leq |f'(t)| + |g'(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |g'(t)| \end{aligned}$$

   on a utilisé l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ dans la 1ère inégalité. Par suite,

$$\sup_{t\in[-1,1]} |(f'+g')(t)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |g'(t)|.$$

   On obtient alors

$$\begin{aligned} N(f+g) &= |(f+g)(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |(f'+g')(t)| \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |g'(t)| \\ &= N(f) + N(g) \end{aligned}$$

On déduit de 1., 2. et 3. que N est bien une norme sur E.