# Intégrale de Riemann

Chapitre VII

29 novembre 2020

## 1 Définition

Soit $[a,b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Une partition $P$ de $[a,b]$ est donnée par $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ où $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Pour $i \in 1, 2, \ldots, n\}$. On pose $\mathcal{P}[a,b]$ l'ensemble des partition de $[a,b]$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application bornée et $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de l'intervalle $[a,b]$. On pose

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

et

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

On remarque que $U(f,P) \geq L(f,P)$. On note

$$U(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f,P)$$

et

$$L(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f,P).$$

**Définition 1.1.** *On dit que $f$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$, noté $f \in \mathcal{R}[a,b]$, si $U(f) = L(f)$ et on note*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Par exemple, on considère l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors, pour toute partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[0,1]$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ on a que $M_i = 1$ et $m_i = 0$. On a donc que

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1$$

et

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0.$$

On en déduit que

$$U(f) = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$$

et

$$L(f) = \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$$

et donc $f \notin \mathcal{R}[0,1]$.

D'autre part, pour $c \in \mathbb{R}$, si on considère l'application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = c$, alors pour toute partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'intervalle $[a,b]$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ on a que $M_i = c$ et $m_i = c$. On a donc que

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

et

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b-a).$$

On en déduit que

$$U(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a)$$

et

$$L(f) = \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = c(b-1)$$

et donc $f \in \mathcal{R}[0,1]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

**Définition 1.2.** *Soit $P$ et $P'$ deux partitions de l'intervalle $[a,b]$. On dit que $P'$ est un raffinement de $P$ si $P \subseteq P'$.*

**Lemme 1.3.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application bornée et $P, P' \in \mathcal{P}[a,b]$. Si $P'$ est un raffinement de $P$ alors*

$$U(f,P') \leq U(f,P)$$

*et*

$$L(f,P') \geq L(f,P).$$

*Démonstration.* On pose $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. On suppose d'abord que

$$P' = \{x_0, \ldots, x_i, x', x_{i+1}, \ldots, x_n\}.$$

On pose

$$M_1' = \sup_{x \in [x_i, x']} f(x),$$
$$M_1' = \sup_{x \in [x', x_{i+1}]} f(x)$$

et

$$M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a donc que

$$\begin{aligned}
U(f, P') &= \sum_{j=1}^{i} M_j \Delta x_j + M_1'(x' - x_i) + M_2'(x_{i+1} - x') + \sum_{j=i+2}^{n} M_j \Delta x_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{i} M_j \Delta x_j + M_{i+1}(x' - x_i) + M_{i+1}(x_{i+1} - x') + \sum_{j=i+2}^{n} M_j \Delta x_j \\
&= \sum_{j=1}^{i} M_j \Delta x_j + M_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \sum_{j=i+2}^{n} M_j \Delta x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j = U(f, P).
\end{aligned}$$

Or, si $P'$ est un raffinement de $P$, on peut itérer le calcul ci-dessus $m$ fois, où $m = |P' \backslash P|$, pour montrer que $U(f, P') \leq U(f, P)$. De même on peut montrer que $L(f, P') \geq L(f, P)$. $\square$

**Theorem 1.4.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Alors*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

*Démonstration.* Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$. On pose $P' = P_1 \cup P_2$ qui est un raffinement de $P_1$ et de $P_2$. On a donc que

$$L(f, P_1) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P_2).$$

Il en suit que $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ pour tout $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$. Et donc

$$L(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq U(f, P)$$

pour toute partition $P \in \mathcal{P}[a, b]$. Finalement,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

$\square$

**Corollaire 1.5** (Critère de Cauchy)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ssi. $\forall \epsilon > 0$ il existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tel que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

*Démonstration.* Par application du théorème précédent, pour toute partition $P \in \mathcal{P}[a, b]$ on a que

$$L(f, P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq U(f, P)$$

et donc

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq U(f, P) - L(f, P).$$

Soit $\epsilon > 0$ et $P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ telle que $U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$. Alors

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

qui montre que $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq 0$. Mais on a aussi que $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \geq 0$. On a donc que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

c'est à dire $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Inversement, supposons $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et soit $\epsilon > 0$. Comme

$$\int_a^b f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

ils existent partitions $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\, dx - \frac{\epsilon}{2} < L(f, P_1)$$

et

$$\int_a^b f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{2} > U(f, P_2).$$

On pose $P = P_1 \cup P_2$. Comme $P$ est un raffinement de $P_1$ et de $P_2$ on a

$$U(f, P) \leq U(f, P_2) < \int_a^b f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{2} < L(f, P_1) + \epsilon \leq L(f, P) + \epsilon$$

et donc

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

□

**Corollaire 1.6.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée. Alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ssi. il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de partitions $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$ telle que*

$$\lim_{n \to \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$$

*et dans ce cas*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} L(f, P_n).$$

*Démonstration.* Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de partitions telle que
$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0.$$
Alors pour tout $\epsilon>0$ il existe $n\geq 1$ tel que $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\epsilon$, qui montre que $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Inversement supposons $f\in\mathcal{R}[a,b]$. Alors pour tout $n\geq 1$ il existe une partition $P_n\in\mathcal{P}[a,b]$ telle que $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\frac{1}{n}$. On a donc que
$$\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0.$$
De plus,
$$0\leq U(f,P_n)-U(f)\leq U(f,P_n)-L(f)\leq U(f,P_n)-L(f,P_n)$$
et donc par le Théorème des Gendarmes,
$$\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=U(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$
où la dernière égalité vient du fait que $f\in\mathcal{R}[a,b]$. $\square$

**Theorem 1.7.** *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une application continue, alors $f\in\mathcal{R}[a,b]$.*

*Démonstration.* Comme $f$ est bornée et uniformément continue (voir Théorème de Heine), pour tout $\epsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que si $|x-y|<\delta$ alors $|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{b-a}$. Soit $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ une partition de l'intervalle $[a,b]$ telle que $\Delta x_i<\delta$ pour tout $1\leq i\leq n$. On a donc que $M_i-m_i<\frac{\epsilon}{b-a}$ pour tout $1\leq i\leq n$. On en déduit que
$$\begin{aligned}U(f,P)-L(f,P)&=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i\\&<\frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n\Delta x_i\\&=\epsilon.\end{aligned}$$
Par application du critère de Cauchy, $f\in\mathcal{R}[a,b]$. $\square$

**Theorem 1.8.** *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une application monotone, alors $f\in\mathcal{R}[a,b]$.*

*Démonstration.* Supposons que $f$ est monotone croissante. Pour $n\geq 1$ one pose $P_n=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ où $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$. On a alors que $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, $M_i=f(x_i)$ et $m_i=f(x_{i-1})$. On a que
$$\begin{aligned}U(f,P_n)-L(f,P_n)&=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i\\&=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\&=\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))\end{aligned}$$
et donc $\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0$ qui montre que $f\in\mathcal{R}[a,b]$. $\square$

**Exemple 1.9.** *Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on peut écrire $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$ tel que $a_k > 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} a_k = 1$ (par exemple $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$). On pose $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Q}(x)} a_k$$

*où $\mathbb{Q}(x) = \{k \in \mathbb{N} : q_k \in [0, x[\}$. Alors $f$ est monotone et donc $f \in \mathcal{R}[0,1]$. D'autre part, chaque rationnel $q \in [0,1]$ est un point de discontinuité de $f$.*

# 2 Propriétés des intégrales

**Theorem 2.1.** *Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Si $a < c < b$ alors $f \in \mathcal{R}[a,c]$ et $f \in \mathcal{R}[c,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

*Démonstration.* Exercice. □

**Theorem 2.2.** *Soient $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

*Démonstration.* Exercice. □

**Theorem 2.3** (Linéarité)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Alors,*

1. *Pour tout $c \in \mathbb{R}$ on a que $cf \in \mathcal{R}[a,b]$ et*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. *$f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ et*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x).$$

*Démonstration.* Si $c \geq 0$ et $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, alors

$$U(cf, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} cf(x)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\Delta x_i = cU(f, P).$$

On a donc que

$$U(cf) = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(cf, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} cU(f, P) = c \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P) = cU(f).$$

De même, on a que $L(cf) = cL(f)$. Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$ on a

$$U(cf) = cU(f) = cL(f) = L(cf).$$

On a donc que $cf \in \mathcal{R}[a,b]$ et

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

On laisse le cas $c \leq 0$ comme exercice.

Pour 2. on commence par montrer que $U(f+g) \leq U(f)+U(g)$ et que $L(f+g) \geq L(f)+L(g)$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$ il existent partitions $P'$ et $P"$ telles que

$$U(f,P') < U(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$U(g,P") < U(g) + \frac{\epsilon}{2}$$

Pour $P = P' \cup P"$, on a

$$U(f,P) \leq U(f,P') < U(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$U(g,P) \leq U(g,P") < U(g) + \frac{\epsilon}{2}.$$

De plus,

$$U(f+g,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x)+g(x))\Delta x_i \leq U(f,P)+U(g,P).$$

Donc

$$\begin{aligned} U(f+g) &\leq U(f+g,P) \\ &\leq U(f,P)+U(g,P) \\ &< U(f) + \frac{\epsilon}{2} + U(g) + \frac{\epsilon}{2} \\ &= U(f)+U(g)+\epsilon. \end{aligned}$$

On a donc que $U(f+g) \leq U(f)+U(g)$. De même on peut montrer que $L(f+g) \geq L(f)+L(g)$. Or,

$$L(f+g) \leq U(f+g) \leq U(f)+U(g) = L(f)+L(g) \leq L(f+g)$$

qui montre qu'on a égalité par tout et

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x).$$

□

**Theorem 2.4.** *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *et* $g:[c,d]\to\mathbb{R}$. *On suppose que* $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et* $g$ *est continue, alors la composition* $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x,y \in [c,d]$, si $|x-y| < \delta$ alors $|g(x)-g(y)| < \epsilon/2(b-a)$. Comme $g$ est continue et donc bornée sur $[c.d]$, il existe réels $p$ et $q$ tels que $g([c,d]) \subset [p,q]$. On pose $\nu = \epsilon\delta/(q-p)$. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$ telle que

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \nu$$

On pose

$$J_\delta = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n,\ M_j - m_j < \delta\}$$

et

$$K_\delta = \{j \in \mathbb{N} : 1 \le j \le n,\ M_j - m_j \ge \delta\}.$$

On remarque que

$$\nu > \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \ge \sum_{i \in K_\delta} \delta \Delta x_i$$

qui donne

$$\sum_{i \in K_\delta} \Delta x_i < \frac{\nu}{\delta} = \frac{\epsilon}{2(q-p)}.$$

On pose $M_i^*$ (resp. $m_i^*$) le supremum (resp. infimum) de $g \circ f$ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Alors,

$$\begin{aligned}
U(g\circ f, P) - L(g \circ f, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\
&= \sum_{i \in J_\delta} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i \in K_\delta} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\
&< \sum_{i \in J_\delta} \frac{\epsilon \Delta x_i}{2(b-a)} + \sum_{i \in K_\delta} (q-p)\Delta x_i \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Par application du critère de Cauchy on a que $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$. □

**Corollaire 2.5.** *Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ et*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

*Démonstration.* On a que $|f| = g \circ f$ où $g$ $g(x) = |x|$ qui est continue. Soit $c \in \{-1, 1\}$ tel que

$$c \int_a^b f(x)\, dx \ge 0.$$

Alors

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = c\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b cf(x)\, dx \le \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

□

**Theorem 2.6.** *Si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ alors le produit $fg \in \mathcal{R}[a, b]$.*

*Démonstration.* Comme $f^2 = \phi \circ f$ où $\phi(x) = x^2$ qui est continue, on a que $f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$. De même, $g^2 \in \mathcal{R}[a, b]$, et par linéarité $(f + g)^2 \in \mathcal{R}[a, b]$. Or,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2.]$$

Par application du Théorème 2.3 on en déduit que $fg \in \mathcal{R}[a, b]$. □

**Remarque 1.** *La réciproque du Corollaire 2.5 est fausse. En effet, on peut vérifier que l'application* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \textit{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*n'est pas Riemann intégrable mais* $|f| \in \mathcal{R}[0,1]$ *car* $|f(x)| = 1$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

**Remarque 2.** *En général, la composition de deux fonctions Riemann intégrables n'est pas Riemann intégrable. Par exemple, on peut montrer que les applications*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

*et*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \textit{si } x = \frac{p}{q} \\ 0 & \textit{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

*sont Riemann intégrables sur* $[0,1]$*, mais la composition*

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

*n'est pas Riemann intégrable sur* $[0,1]$.

# 3 Théorème fondamental de l'analyse

**Theorem 3.1** (Théorème fondamental de l'analyse 1)**.** *Soit* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Soit* $F$ *une fonction dérivable sur* $[a,b]$ *telle que* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$. *Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$ et $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$ telle que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Alors pour tout $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ on a que

$$|\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx| < \epsilon.$$

Or, par application du théorème des accroissements finis, pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tels que

$$F'(s_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

On a donc que

$$|\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx| < \epsilon$$

qui donne

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx| < \epsilon.$$

□

**Theorem 3.2** (Théorème fondamental de l'analyse 2)**.** *Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$ on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

*Alors $F$ est continue sur $[a,b]$. De plus, si $f$ est continue en $x_0 \in [a,b]$, alors $F$ est dérivable en $x_0$ et $F'(x_0) = f(x_0)$.*

*Démonstration.* Comme $f$ est bornée il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a,b]$. Pour $a \leq x < y \leq b$ on a que

$$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)\,dt| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt = M|y-x|.$$

Soit $\epsilon > 0$. On pose $\delta = \epsilon/M$. On a que si $|y-x| < \delta$ alors

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y-x| < \epsilon$$

qui montre que $F$ est continue.

Si $f$ est continue en $x_0$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - x_0| < \delta$ alors $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$. Or, si $x_0 - \delta < s_0 \leq x_0 \leq t_0 < x_0 + \delta$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(t_0) - F(s_0)}{t_0 - s_0}\right| &= \left|\frac{1}{t_0 - s_0}\left(\int_{s_0}^{t_0} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right)\right| \\ &< \left|\frac{1}{t_0 - s_0}[\epsilon(t_0 - s_0)]\right| = \epsilon.\end{aligned}$$

□

# 4 Techniques d'intégration

**Theorem 4.1** (Substitution)**.** *Soit $I$ un intervalle et $\varphi : [a,b] \to I$ dérivable et $\varphi' \in \mathcal{R}[a,b]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b (f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

*Démonstration.* Comme $f$ est continue, il existe $F$ tel que $F' = f$. On a donc que $F \circ \varphi$ est dérivable et

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

On en déduit que

$$\int_a^b (f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy.$$

□

**Theorem 4.2** (Intégration par parties)**.** *Soient $u$ et $v$ deux fonctions $2$ fois dérivables sur un intervalle $I$. Alors pour tout $a < b$ dans $I$ on a*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

*où*

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

*Démonstration.* Comme $(uv)' = u'v + v'u$ on a que

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\, dt.$$

$\square$