Fonctions dérivables

Chapitre VI

7 novembre 2020

1 Définition

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0, et sera notée $f'(x_0)$.

La fonction $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, dont on considère ici la limite en 0, n'est pas définie en ce point. Dans ce cas, l'existence de la limite est équivaut à l'égalité des limites à gauche et à droite :

Définition 1.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point intérieur à I. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche en x_0, et sera notée $f'_-(x_0)$. De même on définit la dérivée à droite, qui sera notée $f'_+(x_0)$.

Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Proposition 1.3. *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Supposons que f est dérivable en x_0. Cela implique que la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe, et est finie. En multipliant par la fonction $(x-x_0)$, qui tend vers 0, quand $x \to x_0$ on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0$$

ou encore que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

qui montre que f est continue en x_0. □

La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais $f'_-(0) = -1 \neq +1 = f'_+(0)$.

Proposition 1.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Alors f est dérivable en x_0 ssi. il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de 0 et $L \in \mathbb{R}$ telles que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hL + h\epsilon(h).$$

Démonstration. Supposons que f est dérivable en x_0. On pose $L = f'(x_0)$ et

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

pour $h \neq 0$, et $\epsilon(0) = 0$. Inversement, supposons qu'il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de 0 et $L \in \mathbb{R}$ telles que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ et $f(x_0 + h) = f(x_0) + hL + h\epsilon(h)$. Divisant par h on a que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L + \epsilon(h).$$

Comme $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ on en déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$$

et donc $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie, qui montre que f est dérivable en x_0. □

2 Opérations sur les dérivées

Theorem 2.1. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonction dérivable en $x_0 \in I$. Alors :*

1. *$f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*
2. *fg est dérivable en x_0 et*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

3. *Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Démonstration. Pour 1. on a que

$$\frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

En passant à la limite quand $h \to 0$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

Pour 2. on a que

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

En passant à la limite quand $x \to x_0$ et en se servant de la continuité de g en x_0 (c'est à dire $\lim_x \to x_0 g(x) = g(x_0)$) on a que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) \right) + \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).
\end{aligned}$$

Finalement pour 3. on a que

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Par passage à la limite, on en déduit que $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

En utilisant 2. on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \cdot f(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.2. *Soint $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subseteq J$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la composition $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Démonstration. Par la Proposition 1.4 ils existent des fonctions ϵ_1 et ϵ_2 telles que

$$\lim_{h\to 0} \epsilon_1(h) = \lim_{h\to 0} \epsilon_2(h) = 0$$

et

$$f(x_0 + h_1) = f(x_0) + h_1 f'(x_0) + h_1\epsilon_1(h_1)$$

et

$$g(f(x_0) + h_2) = g(f(x_0)) + h_2 g'(f(x_0)) + h_2\epsilon_2(h_2)$$

pour tout h_1, h_2 suffisamment proche de 0. Prenons $h_2 = h_1(f'(x_0) + \epsilon(h_1))$ on a que

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h_1)) &= g(f(x_0) + h_2) \\ &= g(f(x_0)) + h_2 g'(f(x_0)) + h_2\epsilon_2(h_2) \\ &= g(f(x_0)) + h_1(f'(x_0) + \epsilon_1(h_1))g'(f(x_0)) \\ &+ h_1(f'(x_0) + \epsilon_1(h_1))\epsilon_2(h_1(f'(x_0) + \epsilon_1(h_1))) \\ &= g(f(x_0)) + h_1 f'(x_0)g'(f(x_0)) + h_1\delta(h_1) \end{aligned}$$

où

$$\delta(h_1) = \epsilon_1(h_1)g'(f(x_0)) + (f'(x_0) + \epsilon_1(h_1))\epsilon_2(h_1(f'(x_0) + \epsilon_1(h_1))).$$

Comme $\lim_{h_1 \to 0} \delta(h_1) = 0$, en utilisant la Proposition 1.4 on a que $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

Theorem 2.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. On pose $J = f(I)$. Alors :*

1. *J est un intervalle (dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I) et f définie une bijection entre I et J.*
2. *La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, du même sens que f.*
3. *Soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et*
$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration. La démonstration de 1. et 2. est donnée comme exercice. Pour 3. posons $y_0 = f(x_0)$ et $x = f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$. On a donc

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

et par passage à la limite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

3 Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis

Définition 3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in V \cap I$. On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0.*

Theorem 3.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et x_0 un point intérieur à I. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. On peut supposer que x_0 est un maximum local de f (autrement on remplace f par $-f$). Soit $V \subseteq I$ un voisinage de x_0 tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in V$. Or, comme f est dérivable en x_0, qui est intérieur à V, on a que les dérivées $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ existent et $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. De plus, pour $x < x_0$ on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Par passage à la limite

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

De même on peut montrer que $f'_+(x_0) \leq 0$. Comme $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, on a que $f'(x_0) = 0$. □

Theorem 3.3 (Rolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue sur $[a, b]$ on a que f admet un minimum global m et un maximum global M dans $[a, b]$. Si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$ et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Autrement, comme $f(a) = f(b)$, on a qu'au moins un des deux extréma est atteint en un point $c \in]a, b[$. En particulier, c est un extremum local intérieur à $[a, b]$ et donc d'après le Théorème 3.2 on a que $f'(c) = 0$. □

Le Théorème de Rolle se généralise de la manière suivante :

Theorem 3.4 (Accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On applique le Théorème de Rolle à la fonction g définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a).$$

En effet, la fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $g(a) = g(b) = 0$. De plus,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Corollaire 3.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *S'il existe un réel M tel que $f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$ alors $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.*
2. *S'il existe un réel m tel que $f'(x) \geq m$ pour tout $x \in]a, b[$ alors $f(b) - f(a) \geq m(b - a)$.*

Démonstration. Pour 1., par application du Théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Comme $f'(c) \leq M$ on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

c'est à dire $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$. Un raisonnement analogue montre 2. □

Corollaire 3.6. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors*

1. *f est constante sur I ssi. $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*
2. *f est croissante sur I ssi. $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
4. *f est décroissante sur I ssi. $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.*
5. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. On montrera 1., 2. et 3. Pour 1., si f est constante alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Inversement, si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, on considère $a, b \in I$ avec $a < b$. Par le Théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[\subseteq I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Comme $f'(c) = 0$ on a que $f(b) = f(a)$ qui montre que f est constante sur I. Pour 2., soit $x \in I$. Si f est croissante on a que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

pour tout h suffisamment proche de 0. Par passage à la limite on en déduit que $f'(x) \geq 0$. Inversement, supposons $f'(x) \geq 0$ for tout $x \in I$. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Par le Théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[\subseteq I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Comme $f'(c) \geq 0$ et $b - a > 0$ on a que $f(b) \geq f(a)$ qui montre que f est croissante. Pour 3., si de plus $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors on a que $f(b) > f(a)$ qui montre que f est strictement croissante. □

On remarque que les réciproques de 3. et 5. sont fausses : par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante mais $f'(0) = 0$. Le Théorème des accroissements finis se généralise de la manière suivante :

Theorem 3.7 (Théorème des accroissements finis généralisé)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. On applique le Théorème de Rolle à la fonction h définie par

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Comme h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $h(a) = h(b)$, on en déduit que $h'(c) = 0$ pour un certain $c \in]a, b[$. □

Corollaire 3.8 (Règle de l'Hôpital)**.** *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* $]a, b[$ *telles que* $f(a) = g(a) = 0$. *Si* $g'(x) \neq 0$ *sur* $]a, b[$ *et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe alors la limite

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe et

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. Soit $x \in]a, b[$. Par le théorème précédent il existe un point $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Quand x tends vers a, on a que c_x tends vers a. Or, comme

$$\lim_{\substack{c \to a \\ c > a}} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

existe, par passage à la limite on a que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□