Fonctions continues

Chapitre V

2 novembre 2020

1 Définition et quelques équivalences

Soit D une partie non-vide de $\mathbb{R}$. En général, D est un intervalle, ou une réunion d'intervalles, ou $D = \mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in D \ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

On dit que f est continue en D si f est continue en a pour tout $a \in D$

Proposition 1.2. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. Alors f est continue en a ssi. pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D on a que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est continue en a. Soit $\epsilon > 0$ et prenons $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans D tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|x_n - a| < \delta$. Alors pour tout $n \geq N$ on a que $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. Inversement, si f n'est pas continue en a, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe un point $x_\delta \in D$ tel que $|x_\delta - a| < \delta$ et $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon$. Et donc, pour tout $n \geq 1$ il existe un point $x_n \in D$ tel que $|x_n - a| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. On a donc que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tend vers a mais $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$. □

Proposition 1.3. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$. Alors f est continue en a ssi. pour tout voisinage U de $f(a)$ on a que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a.*

Démonstration. Supposons que f est continue en a et prenons un voisinage U de $f(a)$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $|y - f(a)| < \epsilon$ implique $y \in U$. Soit $\delta > 0$ te que $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Alors on a que $|x - a| < \delta$ implique que $x \in f^{-1}(U)$ qui montre que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a. Inversement, supposons que pour tout voisinage U de $f(a)$ on a que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a. Soit $\epsilon > 0$. On pose $U = B(f(a), \epsilon)$. Or, comme U est un voisinage de $f(a)$ on a que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a. Donc il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta \Longrightarrow x \in f^{-1}(U)$, c'est à dire $|x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) \in U$. □

Corollaire 1.4. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Alors f est continue ssi. pour tout ouvert $U \subseteq \mathbb{R}$ on a que $f^{-1}(U)$ est ouvert.*

Démonstration. Supposons que f est continue et soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Si $f^{-1}(U) = \emptyset$ alors $f^{-1}(U)$ est ouvert. Autrement, pour $a \in f^{-1}(U)$ on a que $f(a) \in U$. Or, comme U est ouvert, on a que U est un voisinage de $f(a)$ et donc par application de la Proposition 1.3 on a que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a. On a montré que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de tout point $a \in f^{-1}(U)$ et donc $f^{-1}(U)$ est ouvert. Pour l'autre direction, soit $a \in D$ et $\epsilon > 0$. On pose $U = B(f(a), \epsilon)$. Comme U est ouvert, on a que $f^{-1}(U)$ est ouvert et contient a. Il en suit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$. C'est à dire $f(B(a, \delta) \subseteq U$. □

Corollaire 1.5. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Alors f est continue ssi. pour tout fermé V de $\mathbb{R}$ on a que $f^{-1}(V)$ est fermé.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $f^{-1}(V^c) = f^{-1}(V)^c$. □

Theorem 1.6. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors $f + g, fg$ sont continues et si g ne s'annule pas sur D alors $\frac{f}{g}$ est continue.*

Exercice 1.7. *Démontrer le Théorème 1.6.*

Theorem 1.8. *Soit $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D_1) \subseteq D_2$. Si f et g sont continues, alors la composition $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration. Soit $a \in D_1$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe ϵ' tel que pour tout $y \in D_2$, si $|y - f(a)| < \epsilon'$ alors $|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$. De plus, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_1$, si $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - f(a)| < \epsilon'$. On a donc que pour tout $x \in D_1$, si $|x - a| < \delta$ alors $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$. □

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Theorem 2.1 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout réel r compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = r$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a) < r < f(b)$. Nous construisons par récurrence une suite d'intervalles $[a_k, b_k]$ de la façon suivante :

- $[a_0, b_0] = [a, b]$.
- Supposons $[a_k, b_k]$ construit. On pose $m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Si $f(m_k) = r$, on s'arrête. Sinon on pose

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [m_k, b_k] & \text{si } f(m_k) < r \\ [a_k, m_k] & \text{si } f(m_k) > r. \end{cases}$$

Si la suite d'intervalles ainsi construite est finie, alors on a trouvé c tel que $f(c) = r$. Sinon, nous avons, par construction, les propriétés suivantes pour tout k :

1. $f(a_k) < r < f(b_k)$
2. $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$
3. $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$.

En particulier les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune c. Ainsi $f(a_k)$ et $f(b_k)$ convergent vers $f(c)$. Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité 1., on trouve que $f(c) = r$. □

Corollaire 2.2. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. Cela découle du fait suivant : une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi. pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$ on a que $[a, b] \subseteq I$. $\square$

Voici un cas particulier du TVI :

Theorem 2.3 (Théorème de Bolzano)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. En effet, l'inégalité $f(a)f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, et donc que 0 est une valeur compris entre $f(a)$ et $f(b)$. $\square$

Exercice 2.4. *Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Theorem 2.5 (Théorème des bornes)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.*

Démonstration. Commençons par montrer que f est majorée. Raisonnons par l'absurde : si f n'est pas majorée, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme $[a, b]$ est borné, d'après Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain x. Comme $[a, b]$ est fermé, on a que $x \in [a, b]$. Par continuité de f on a que $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Mais ceci est impossible puisque $(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc f est majorée.

On pose $M = \sup f([a, b])$. Nous allons montrer que M est atteint par la fonction f. Pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in [a, b]$ tel que $f(y_n) > M - \frac{1}{n}$. Comme $M \geq f(y_n)$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit (par le théorème des gendarmes) que la suite $(f(y_n)_{n\geq 1}$ converge vers M. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers un certain $y \in [a, b]$. Mais alors, $f(y)$ est égal à la limite de la suite $(f(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ et donc $f(y) = M$. $\square$

3 Continuité uniforme

Définition 3.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur D si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in D$ si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Il est claire que si f est uniformément continue sur D alors f est continue sur D. Mais pas inversement : Par exemple, la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[0, +\infty[$ est continue mais n'est pas uniformément continue. En effet, pour $x, y \in [0, +\infty[$ on a que

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y|.$$

Ainsi, si on prend $\epsilon > 0$, même si $|x - y|$ est très petit, il suffira de choisir x et y suffisamment grands pour que $|f(x) - f(y)|$ soit plus grand que ϵ. Par contre, la même fonction est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, pour $x, y \in [0, 1]$, on a que $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$ il suffit de prendre $\delta = \epsilon/2$.

Theorem 3.2 (Théorème de Heine)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f ne soit pas uniformément continue sur $[a,b]$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ il existent $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. D'après Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(x_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Comme $[a,b]$ est fermé, la limite L de la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $[a,b]$. De plus, comme $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ on en déduit que la suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers L. Mais alors, par continuité de f, les suites $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(L)$, ce qui contredit le fait que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0$. $\square$