Séries numériques

Chapitre IV

19 octobre 2020

1 Séries et sommes partielles

La série numérique associée à une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}$ est l'expression

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Pour étudier une série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, il convient de définir la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles définie par

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots a_n.$$

Définition 1.1. *On dit que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si sa suite de sommes partielles $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$. La valeur de la série est alors définie par*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Par ailleurs, on dit que la série diverge si la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de limite.

Exemple 1.2. *On considère la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. On peut vérifier par une simple récurrence que*

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a donc que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Exemple 1.3. *On considère la série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$. La suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 1}$ est donnée par $s_n = 0$ pour n paire et $s_n = -1$ pour n impair. On voit bien que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de limite et donc la série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$ est divergente.*

Proposition 1.4. *Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.*

Démonstration. On démontre la contraposée. Supposons que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Alors, il existe $r > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq N$ tel que $|a_n| \geq r$. On a donc que $|s_n - s_{n-1}| = |a_n| \geq r$ pour une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy et donc ne converge pas. $\square$

L'utilité de la proposition précédente est pour démontrer qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente lorsque $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Par exemple, si on considère la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+2}{2n^3+11}.$$

On vérifie que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+2}{2n^3+11} = \frac{1}{2} \neq 0$$

et donc la série diverge.

Attention : La réciproque de la Proposition 1.4 est fausse. C'est à dire, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, cela n'implique pas toujours que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Par exemple, considérons la série *harmonique* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. On a bien que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'autre part, on montrera que la série est divergent. Pour cela, on montre par récurrence que $s_{2^n} > \frac{n}{2}$ où $(s_n)_{n\geq 1}$ est la somme partielle associée. Or, pour $n = 1$ on que $s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{n}{2}$. Supposons maintenant que $s_{2^n} > \frac{n}{2}$. On a alors que

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > s_{2^n} + 2^n(\frac{1}{2^{n+1}}) > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

On a donc que la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée et donc ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Comme une suite dans $\mathbb{R}$ est convergente ssi. elle est de Cauchy, on obtient ainsi une condition nécessaire et suffisante pour la convergence des séries :

Proposition 1.5 (Critère de Cauchy)**.** *Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi. pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $m \geq 1$ on ait*

$$|\sum_{i=1}^{m} a_{n+i}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \epsilon.$$

Définition 1.6. *On dit qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.*

Corollaire 1.7. *Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $m \geq 1$ on ait

$$|\sum_{i=1}^{m} |a_{n+i}|| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \epsilon.$$

Alors on a

$$|\sum_{i=1}^{m} a_{n+i}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \epsilon$$

et par application de la proposition précédente on en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Exercice 1.8. *Montrer que si $\sum_{n\geq 1} a_n = A$ et $\sum_{n\geq 1} b_n = B$ alors $\sum_{n\geq 1}(a_n + b_n) = A + B$ et que $\sum_{n\geq 1} ca_n = cA$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

2 Séries à termes positifs

Dans cette section on s'intéresse à la convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à termes positifs, c'est à dire $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Dans ce cas, la suite des sommes partielles est toujours croissante ($s_{n+1} \geq s_n$ pour tout $n \geq 1$). D'après le Théorème 2.4 (Chapitre II) on a qu'une suite croissante converge ssi. elle est bornée. On a donc

Theorem 2.1. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs. Alors la série converge si et seulement la suite des sommes partielles est bornée.*

Par exemple, considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. On a alors que

$$s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e$$

et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

On appelle série *géométrique* de terme constant $a > 0$ et de raison $r > 0$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. On montrera qu'une telle série converge si et seulement si $r < 1$. D'une part on remarque que pour $r \geq 1$ la suite $(ar^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tends pas vers 0 car $ar^n \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, si l'on a que $r < 1$ alors

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

et donc trouve que $(1-r)s_n = s_n - rs_n = a - ar^n$. Cela donne

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r}.$$

Comme $r < 1$, on a que $r^n \to 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

Ainsi la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge vers $\frac{a}{1-r}$.

Theorem 2.2 (Test de comparaison)**.** *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs et $M > 0$.*

1. *On suppose que $b_n \leq Ma_n$ pour tout $n \geq 1$ Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.*
2. *On suppose que $b_n \geq Ma_n$ pour tout $n \geq 1$ Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Démonstration. On pose $(s_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(t_n)_{n\geq 1}$) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (resp. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$). Pour 1. comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, on pose $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Or, la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est croissante et bornée car :

$$t_n \leq Ms_n \leq Ms.$$

On en déduit que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ converge qui montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Pour 2., comme la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente, on a que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée et tends vers $+\infty$. Or, l'inégalité $t_n \geq Ms_n$ montre que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée également et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge. $\square$

On devrait remarquer ici que les hypothèses dans le théorème précédent peuvent être plus faibles. En effet, dans 1., on peut remplacer la condition $b_n \leq Ma_n$ pour tout $n \geq 1$ par la condition : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \leq Ma_n$ pour tout $n \geq N$. Même chose pour l'inégalité dans 2. En effet, si la série $\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge aussi car

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n.$$

Theorem 2.3. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs décroissante. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi. la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$ converge.*

Démonstration. On pose $(s_n)_{n\geq 1}$ (resp. $(t_n)_{n\geq 1}$) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (resp. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$). Pour $n < 2^k$ on a que

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k \end{aligned}$$

qui montre que $s_n \leq t_k$ pour $n < 2^k$. D'autre part, pour $n > 2^k$ on a

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

qui montre que $2s_n \geq t_k$ pour $n > 2^k$. On a donc que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ sont soit tous les deux bornées ou tous les deux non-bornées. $\square$

Theorem 2.4. *La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge ssi. $p > 1$.*

Démonstration. Si $p \leq 0$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge par la Proposition 1.4. Pour $p > 0$ on peut appliquer le théorème précédent. On a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

qui est une série géométrique de raison $r = 2^{1-p}$. Elle converge ssi. $r < 1$ ssi. $2^{1-p} < 1$ ssi. $1 - p < 0$. $\square$

3 Tests de convergence pour les séries

Theorem 3.1 (Test de la racine de Cauchy)**.** *Étant donné une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, on pose $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Alors*

1. *Si $\alpha < 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ;*
2. *Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*
3. *Si $\alpha = 1$ alors on ne peut rien conclure.*

Démonstration. Si $\alpha < 1$, on peut choisir β tel que $\alpha < \beta < 1$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

pour tout $n \geq N$. On a donc que

$$|a_n| < \beta^n$$

pour $n \geq N$. Or comme $0 < \beta < 1$, la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ converge. Par application du test de comparaison on a que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, et donc par le Corollaire 1.7 la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\alpha > 1$, alors il existe $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \alpha > 1.$$

On a alors que $|a_n| > 1$ pour une infinité d'indices n et donc $lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Cela montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Finalement, pour 3. il suffit de considérer les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. □

Theorem 3.2 (Test du quotient de d'Alembert)**.** *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série.*

1. *Si $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
2. *Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ pour tout $n \geq N_0$ pour un certain $N_0 \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Démonstration. Pour 1., il existe $\beta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

pour tout $n \geq N$. Cela implique (par une simple récurrence) que

$$|a_{N+m}| < \beta^m |a_N|.$$

On a donc

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \beta^n$$

pour tout $n > N$. Par application du test de comparaison, on en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, et donc par le Corollaire 1.7 la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. D'autre part, si

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$

pour tout $n \geq N_0$.

On a donc que $lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Cela montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

Comme dans le test de la racine de Cauchy, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors on ne peut rien conclure. Il suffit de considérer les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

On considère la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots .$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\
\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.
\end{aligned}$$

D'après le test de la racine de Cauchy, on en déduit que la série converge. Le test du quotient de d'Alembert ne s'applique pas dans ce cas.

Lemme 3.3. *Étant donné deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on pose*

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

pour $n \geq 1$ et $A_{-1} = 0$. Alors, pour $0 \leq p \leq q$ on a

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.4. *Étant donné deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on pose*

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

. On suppose que

1. *la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est bornée ;*
2. $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$
3. $lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $|A_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_N \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Or, pour $N \leq p \leq q$ on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\ &\leq M \left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right| \\ &= 2Mb_p \leq 2Mb_N \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Par application du critère de Cauchy, on a que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge. □

Theorem 3.5 (Théorème de Leibnitz)**.** *Soit* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. On suppose que*

$|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots;$

$c_{2n-1} \geq 0$ *et* $c_{2n} \leq 0$

$lim_{n\to\infty} c_n = 0$

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge.*

Démonstration. Il s'agit d'une application du Théorème 3.4 avec $a_n = (-1)^{n+1}$ et $b_n = |c_n|$. □

Comme application du théorème précédent, on a que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

converge (mais elle ne converge pas absolument).

4 Réarrangement d'une série

On considère la série convergente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots .$$

Effectuons les manipulations algébriques suivantes :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{1}$$

c'est à dire deux termes positifs suivis par un terme négatif suivi par deux termes positifs suivis par .... On pose $(t_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série (1). Or,

$$S < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

D'autre part, comme

$$\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} > 0$$

pour $n \geq 1$, on a que $t_3 < t_6 < t_9 < \cdots$ et donc

$$\limsup_{n\to\infty} t_n > t_3 = \frac{5}{6}$$

qui implique le la série (1) ne converge pas vers S. Cet exemple est un cas particulier du théorème suivant dont la preuve sera omise :

Theorem 4.1 (Théorème de réarrangement de Riemann)**.** *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série convergente mais qui ne converge pas absolument. Alors pour tout $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ il existe un réarrangement $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tel que*

$$\limsup_{n\to\infty} s'_n = \alpha \qquad \liminf_{n\to\infty} s'_n = \beta$$

où la suite $(s'_n)_{n\geq 1}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$.

D'autre part, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors tout réarrangement de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ mène à une série qui converge absolument et qui aura la même valeur que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

Theorem 4.2. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série qui converge absolument. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application bijective. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$ converge absolument et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Démonstration. On pose $M = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Alors on a que

$$\sum_{i=0}^{n} |a_{\phi(i)}| \leq M$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$ converge absolument. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|S - \sum_{i=1}^{N} a_i| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit N' tel que les termes $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sont parmi $a_{\phi(1)}, a_{\phi(2)}, \ldots, a_{\phi(N')}$. Alors pour $n > N'$ on a

$$\begin{aligned} |S - \sum_{i=1}^{n} a_{\phi(i)}| &< |S - \sum_{i=1}^{N} a_i| + \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_k| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

qui montre que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$$

converge vers S. □