Espaces vectoriels normés

Chapitre III

11 octobre 2020

1 Normes, produits scalaires et distances

Dans tout ce qui suit, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1.1. *Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est appelée norme si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $N(x) = 0$ *implique* $x = 0$.
2. *Pour* $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a* $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. *Pour* $x, y \in E$ *on a* $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Exercice 1.2. *Montrer que si $N : E \to \mathbb{R}$ est une norme, alors $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.*

Définition 1.3. *Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est à dire, une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant*

1. $\forall x \in E$ *les applications* $\varphi(x, \cdot), \varphi(\cdot, x) : E \to \mathbb{R}$ *sont linéaires ;*
2. $\forall x, y \in E$ *on a* $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
3. $\forall x \in E \setminus \{0\}$ *on a* $\varphi(x, x) > 0$.

Le produit scalaire $\varphi(x, y)$ est souvent noté $< x, y >$. Un espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire, est un **espace Euclidien***.*

La donnée d'un produit scalaire sur E permet de définir une norme N sur E par la relation :

$$N(x) = \sqrt{< x, x >}.$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E. Alors $\forall x, y \in E$ on a*

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}.$$

Démonstration. On pose $\varphi(x) =< x, x >$ pour tout $x \in E$. L'inégalité est trivialement vérifiée si $x = 0$ ou $y = 0$. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$ et considérons le polynôme (de degré 2) définie par $P(\lambda) = \varphi(x + \lambda y)$. Le produit scalaire étant une forme définie positive, on en déduit que $P(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Or,

$$P(\lambda) = \lambda^2 \varphi(y) + 2\lambda < x, y > + \varphi(x).$$

On en déduit que son discriminant $\Delta \leq 0$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire

$$\Delta = 4(< x, y >^2 - \varphi(x)\varphi(y)) \leq 0.$$

Par passage à la racine on a que

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}.$$

$\square$

Exemple 1.5 (La norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^2$)**.** *La norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est définie par*

$$\begin{aligned} || \cdot ||_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Le produit scalaire associé à $|| \cdot ||_2$ est $< x, y >_2 = x_1y_1 + x_2y_2$. Pour vérifier que $|| \cdot ||_2$ est bien une norme on a que si $||x||_2 = 0$ alors $x_1^2 + x_2^2 = 0$ qui implique que $x_1 = x_2 = 0$. On vérifie facilement que $||\lambda x||_2 = |\lambda| \cdot ||x||_2$. Finalement

$$\begin{aligned} ||x + y||_2^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= ||x||_2^2 + ||y||_2^2 + 2 < x, y >_2 \\ &\leq ||x||_2^2 + ||y||_2^2 + 2||x||_2||y||_2 \\ &= (||x||_2 + ||y||_2)^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En passant à la racine on retrouve l'inégalité triangulaire.

Exercice 1.6. *Montrer que l'application $|| \cdot ||_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $||(x_1, x_2)||_1 = |x_1| + |x_2|$ est une norme.*

Exercice 1.7. *Montrer que l'application $|| \cdot ||_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $||(x_1, x_2)||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ est une norme.*

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire $< \cdot, \cdot >_2$ dans $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$< x, y >_2 = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Par conséquent, la norme Euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{< x, x >_2}.$$

Les autres normes se généralisent aussi au cas de la dimension n :

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

et

$$||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

On peut aussi munir $\mathbb{R}^n$ de la norme $|| \cdot ||_p$, pour p entier naturel non nul, définie par

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

La preuve que $|| \cdot ||_p$ consitue une norme repose sur les inégalités de Hölder et Minkowski.

Définition 1.8. *Soit X un ensemble. Une distance d sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *$\forall x, y \in$ on a que $d(x, y) = 0$ implique $x = y$.*
2. *$\forall x, y \in X$ on a que $d(x, y) = d(y, x)$.*
3. *$\forall x, y, z \in X$ on a que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.*

Un espace métrique est la donnée d'un couple (X, d), où d est une distance sur un espace X.

Dans $\mathbb{R}$ on peut définir une distance par $d(x, y) = |x - y|$.

Exercice 1.9. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = N(x - y)$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.*

2 Ouverts et fermés

Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme N.

Définition 2.1 (boule ouverte)**.** *La boule ouverte de centre z et de rayon r, notée $B(z, r)$, désigne l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $N(x - z) < r$.*

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $|| \cdot ||_2$, la boule ouverte de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 est l'intérieur du cercle unité privé de sa frontière. Si d'autre part on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $|| \cdot ||_\infty$,, alors la boule ouverte unité est l'intérieur du carré de bord délimité par les points $(-1, -1), (-1, 1), (1, 1)$ et $(1, -1)$. En général, pour $p \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$, note par B_p la boule unité (c'est à dire de centre O et de rayon 1,) définie par la norme $|| \cdot ||_p$. Attention : On parle de boule ouverte associée à une norme, bien qu'en général, une boule n'ait rien de rond. Par exemple, si l'on considère la norme $|| \cdot ||_{\infty|,}$ alors la boule unité ouverte est un carré.

Définition 2.2. *Un ensemble $U \subseteq E$ est appelé ouvert si, pour tout point $x \in U$ il existe une boule ouverte de centre x, qui est incluse dans U.*

On remarque qu'une boule ouverte est un ouvert, ainsi que E et $\emptyset$.

Définition 2.3. *Un ensemble $F \subseteq E$ est appelé fermé si son complémentaire dans E est un ouvert.*

On remarque que E et $\emptyset$ sont fermés.

Définition 2.4 (boule fermée)**.** *La boule fermée de centre z et de rayon r, notée $\bar{B}(z, r)$, désigne l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $N(x - z) \leq r$.*

Une boule fermée dans un espace vectoriel normé E est un fermé.

Définition 2.5. *La topologie de E, notée $\mathcal{T}$, est l'ensemble des ouverts de E.*

Définition 2.6. *Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x \in E$ on a*

$$N_1(x) \leq aN_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leq bN_1(x).$$

Proposition 2.7. *Deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E donnent la même topologie.*

Démonstration. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les topologies associées aux normes N_1 et N_2. On va montrer que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. Soit $A \in \mathcal{T}_1$. Si $A = \emptyset$ alors $A \in \mathcal{T}_2$. Donc on peut supposer $A \neq \emptyset$. Soit $x \in A$. Alors il existe $r_x > 0$ tel que $B_1(x, r_x) \subseteq A$ où $B_1(x, r_x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r_x pour la norme N_1. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $z \in E$ on a

$$N_1(z) \leq aN_2(z) \quad \text{et} \quad N_2(z) \leq bN_1(z).$$

Or, pour $z \in E$, si $N_2(z-x) < \frac{r_x}{a}$ alors $N_1(z-x) \leq aN_2(z-x) < r_x$. On en déduit que $B_2(x, \frac{r_x}{a}) \subseteq B_1(x, r_x) \subseteq A$. Cela montre que A est un ouvert pour la norme N_2 et donc $A \in \mathcal{T}_2$. The façon symétrique on montre que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

$\square$

Exemple 2.8. *Les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a que*

$$\max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

et donc

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty.$$

De même, si on pose $|x_j| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ on a que

$$|x_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n|x_j|^2} \leq \sqrt{n}|x_j|$$

qui montre que les normes $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.9. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Alors*

1. *Si A et B sont des ouverts, alors $A \cap B$ est un ouvert.*
2. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un ouvert de E.*
3. *Si A et B sont des fermés de E, alors $A \cup B$ est un fermé de E.*
4. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de E alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un fermé de E.*

Démonstration. Pour 1., si $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cap B$ est ouvert. Autrement, soit $x \in A \cap B$. Alors il existent r_1, r_2 tels que $B(x, r_1) \subseteq A$ et $B(x, r_2) \subseteq B$. Or, pour $r = \min\{r_1, r_2\}$ on a que $B(x, r) \subseteq A \cap B$. Pour 2., si $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert. Autrement, pour $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, il existe $i \in I$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A_i$. On a donc $B(x, r) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. $\square$

Un raisonnement par récurrence montre que tout intersection fini d'ouverts est un ouvert et tout réunion fini de fermés est un fermé.

Exercice 2.10. *Montrer les propriétés 3. et 4. de la Proposition 2.9.*

3 Intérieur et adhérence

Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme N.

Définition 3.1 (voisinage)**.** *Soit $a \in E$. On dit que $U \subseteq E$ est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq U$.*

Proposition 3.2. *Soit $a \in E$.*

1. *Si A et B sont deux voisinages de a, alors $A \cap B$ est un voisinage de a.*
2. *Si A est un voisinage de a et $A \subseteq B$, alors B est un voisinage de a.*
3. *$A \subseteq E$ est un ouvert ssi. A est un voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(a, r_1) \subseteq A$ et $B(a, r_2) \subseteq B$. Or, pour $r = \min\{r_1, r_2\}$ on a que $B(a, r) \subseteq A \cap B$. La propriété 2. est triviale. Pour 3., soit $A \subseteq U$ un ouvert. Si $A = \emptyset$ alors A est un voisinage de chacun de ses points. Si $A \neq \emptyset$, alors pour chaque $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. On a donc que A est un voisinage de chaque $a \in A$. Inversement, on suppose que A est un voisinage de chacun de ses points. Si A est vide alors A est ouvert. Autrement, soit $a \in A$. Alors A est un voisinage de a et donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Cela montre que A est ouvert. □

Définition 3.3 (intérieur)**.** *Soit $A \subseteq E$. Un point $a \in A$ est dit intérieur à A si A est un voisinage de a. L'intérieur de A, noté A°, est l'ensemble des points intérieurs de A.*

Proposition 3.4. *Soit $A \subseteq E$. Alors on a*

1. *A° est un ouvert.*
2. *A° est le plus grand ouvert inclus dans A.*
3. *A est ouvert ssi. $A = A^{\circ}$.*

Démonstration. Pour 1., soit $a \in A^{\circ}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Or, $B(a, r)$ est un ouvert, et donc $B(a, r)$ est un voisinage de chacun de ses points, et donc A est un voisinage de chacun des points de $B(a, r)$. On en déduit que $B(a, r) \subseteq A^{\circ}$ qui montre que A° est ouvert. Pour 2., on suppose que B est un ouvert inclus dans A. Si B est vide alors $B \subseteq A^{\circ}$. Autrement, pour $a \in B$ on a que B est un voisinage de a et donc A est un voisinage de a. Cela montre que $a \in A^{\circ}$ et donc $B \subseteq A^{\circ}$. La propriété 3. est une conséquence directe des autres deux. □

Exercice 3.5. *Montrer que $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ et que si $A \subseteq B$ alors $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$.*

Définition 3.6 (adhérence)**.** *Soit $A \subseteq E$. Un point $a \in E$ est dit adhérent à A si pour tout $r > 0$ on a que $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. L'adhérence de A, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.*

Proposition 3.7. *Soit $A \subseteq E$. Alors*

1. *$\overline{A}$ est un fermé de E qui contient A.*
2. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A.*

Démonstration. Pour 1., il est évident que $A \subseteq \overline{A}$. Si $x \in E \setminus \overline{A}$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Or, comme, $B(x, r)$ est un ouvert, pour tout $y \in B(x, r)$ il existe $s > 0$ tel que $B(y, s) \subseteq B(x, r)$ et donc $B(y, s) \cap A = \emptyset$. Cela montre que $B(x, r) \subseteq E \setminus \overline{A}$ et donc que $E \setminus \overline{A}$ est ouvert. Pour 2. on suppose que B est un fermé contenant A. Soit $x \in E \setminus B$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq E \setminus B \subseteq E \setminus A$. On en déduit que $x \notin \overline{A}$. Cela montre que $E \setminus B \subseteq E \setminus \overline{A}$ et donc que $\overline{A} \subseteq B$. □

Proposition 3.8. *Soient A et B deux parties de E.*

1. *Si $A \subseteq B$ alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
2. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*
3. *A est fermé ssi. $A = \overline{A}$.*
4. *Pour $a \in E$ et $r > 0$ on a que $\overline{B(a,r)} = \bar{B}(a,r)$.*

Exercice 3.9. *Montrer la Proposition 3.8.*

4 Compacité dans un espace vectoriel normé

Dans tout ce qui suit, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini.

Définition 4.1. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $L \in E$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L ssi. $\lim_{n\to\infty} N(u_n - L) = 0$, c'est à dire :*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_0 \text{ tel que pour tout } n \geq N_0 \text{ on a } N(u_n - L) < \epsilon.$$

Définition 4.2. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy ssi.*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_0 \text{ tel que pour tout } m, n \geq N_0 \text{ on a } N(u_n - u_m) < \epsilon.$$

Proposition 4.3. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Alors*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Exercice 4.4. *Montrer la Proposition 4.3.*

Proposition 4.5 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subseteq E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé dans E.*
2. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers un point $x \in E$, alors $x \in A$.*

Démonstration. Supposons d'abord que A est fermé. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers $x \in E$. Alors $x \in \overline{A}$ qui montre $x \in A$. Inversement, supposons que toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in E$ implique que $x \in A$. On va montrer que A est fermé. Il suffit de montrer que $\overline{A} \subseteq A$. Soit $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a que $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. On construit donc une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de A telle que $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ pour toute $n \geq 1$. On a donc que $N(a_n - x) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, c'est à dire $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. On a donc que $x \in A$.

□

Définition 4.6. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Une partie X de E est dite compacte si de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente dans X.*

Exemple 4.7. *Considérons l'espace normé $\mathbb{R}$, muni de la norme usuelle $|\cdot|$ Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$. En fait, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments avec $u_n \in [a, b]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 2.8 du Chapitre II), on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $[a, b]$. D'autre part, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas compact. Il suffit de prendre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$.*

Theorem 4.8. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et X un compact de E. Alors, X est une partie fermée et bornée de E.*

Démonstration. Montrons d'abord que X est borné. Supposons au contraire que X n'est pas borné. On construit donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tel que $N(x_n) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors toute sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente, une contradiction. Pour montrer que X est fermé, on va utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers un point $x \in E$. Par compacité de X il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans X. Mais par l'unicité de limites, on a que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ qui montre que $x \in X$. On a donc que X est fermé. □

Remarque 1. *Un espace vectoriel normé (E, N) n'est jamais compact, car E n'est pas borné. La réciproque du Théorème 4.8 n'est pas toujours vraie, c'est à dire fermé et borné n'est pas nécessairement compact.*

Proposition 4.9. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et X un compact de E. Si Y est une partie fermée de X, alors Y est compacte.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y. Comme $Y \subseteq X$ et X est compacte, il existe une sous-suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans X. Comme Y est fermé, $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in Y$ et donc Y est compacte. □

Définition 4.10. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé, X une partie de E et $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.*

Theorem 4.11. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et X une partie de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est compacte.*
2. *Pour tout recouvrement de X par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ il existe $J \subseteq I$ fini tel que $X \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.*