Les nombres réels

Chapitre I

11 septembre 2020

1 Pré-requis

La première notion que nous prendrons pour acquis est celle d'ensemble. Un *ensemble* est une collection ou un groupement d'objets distincts; ces objets s'appellent les *éléments* de cet ensemble. Les éléments d'un ensemble sont eux mêmes des ensembles. Un ensemble est dit vide s'il n'a aucun élément; l'ensemble vide sera noté $\emptyset$.

Étant donné un ensemble A et un élément a, si cet élément appartient à l'ensemble A on écrit $a \in A$, alors que si a n'est pas dans A on écrit $a \notin A$. Un ensemble B est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de A si tout élément de B est un élément de A. Lorsque B est sous-ensemble de A on écrit $B \subseteq A$. Deux ensembles A et B sont dits égaux si l'on a $B \subseteq A$ et $A \subseteq B$. Inversement, un sous-ensemble non-vide $B \subseteq A$ sera dit *propre* si l'on a $B \neq A$, ce que l'on notera comme $B \subset A$. Étant donné un ensemble A on pose $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble de tous les parties de A.

Lorsque B est sous-ensemble de A on a la notion de sous-ensemble *complémentaire* de B dans A :

$$B^c = \{a \in A : a \notin B\}.$$

Deux opérations fondamentales sur les ensembles :

La *réunion* de A et B : $A \cup B = \{a : a \in A \text{ ou } a \in B\}$.

L'intersection de A et B : $A \cap B = \{a : a \in A \text{ et } a \in B\}$. De façon générale on introduit la notion de réunion et d'intersection finie :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Et de même pour un ensemble d'indices I, qui peut être infini, on introduit

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a : \exists i \in I \text{ et } a \in A_i\}.$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{a : a \in A_i \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Pour un ensemble A on note

$$\bigcup A = \bigcup_{a \in A} a$$

et

$$\bigcap A = \bigcap_{a \in A} a.$$

On a donc que $x \in \bigcup A$ si $x \in a$ pour un certain $a \in A$ et $x \in \bigcap A$ si $x \in a$ pour tout $a \in A$. On vérifie facilement que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = (\bigcap_{i \in I} A_i^c)^c$$

et

$$\bigcap_{i \in I} A_i = (\bigcup_{i \in I} A_i^c)^c.$$

Soient A et B deux ensembles. Une application f de A vers B, noté $f : A \to B$, est une règle qui associe à chaque élément $a \in A$ un *unique* élément $f(a) \in B$. Une application $f : A \to B$ est dite *injective* si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Ceci est équivalent à dire que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. L'application f est dite *surjective* si $\forall b \in B\ \exists a \in A$ tel que $f(a) = b$. Lorsque l'application $f : A \to B$ est à la fois injective et surjective, on dit que f est *bijective* et que les ensembles A et B sont en *bijection*.

Étant donné deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$ on peut considérer leur composition qui sera l'application $g \circ f : A \to C$ donnée par $g \circ f(x) = g(f(x))$: On vérifie que la composition d'applications est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Une relation d'ordre, notée $\leq$, sur un ensemble A est une relation sur les éléments de A qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Pour $a, b \in A$ on a $a \leq b$ ou $b \leq a$;
2. Pour $a, b \in A$ on a que si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.
3. Pour $a, b, c \in A$ si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

Un ensemble A muni d'une relation d'ordre $\leq$ est appelé un ensemble *ordonné*. L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ des nombres naturels muni de sa relation d'ordre usuelle $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$ est un ensemble ordonné. Et de même l'ensemble des entiers $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ et des rationnels $\mathbb{Q}$ sont des ensembles ordonnés.

Théorème 1 (Principe d'induction pour les ensembles)**.** *Soit* $A \subseteq \mathbb{N}$ *tel que*

1. $0 \in A$;

2. $x \in A$ *implique que* $x + 1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que $A \neq \mathbb{N}$. Soit x le plus petit élément de A^c. Comme $0 \in A$ on a que $x \geq 1$ et donc $x - 1 \in A$. Mais si $x - 1 \in A$ alors 2. implique que $x \in A$, une contradiction.

□

Une deuxième ennoncé du Principe d'induction est de considérer une proposition P qui dépend de $\mathbb{N}$. Pour montrer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on utilise le principe d'induction suivant :

Théorème 2 (Principe d'induction pour les propositions)**.** *Étant donné une proposition* $P(n)$ *dépendant de* $n \in \mathbb{N}$*, si*

1. $P(0)$ *est vrai et*

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ *si* $P(n)$ *est vrai alors* $P(n+1)$ *est vrai,*

alors $P(n)$ *est vrai pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ est vrai}\}$ et on applique le principe d'induction sur les ensembles. $\square$

L'hypothèse $P(0)$ vrai s'appelle le *cas de base* et l'hypothèse $P(n)$ vrai implique $P(n+1)$ vrai *le pas d'induction.*

Nous rappelons ici la construction des nombres rationnels à partir des entiers $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\,, b \neq 0\,, a \text{ et } b \text{ premiers entre eux}\}.$$

Les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{Q}$ vérifient les propriétés suivantes :

1. fermeture : $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$ et $ab \in \mathbb{Q}$.
2. associativité : $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$ et $(ab)c = a(bc)$.
3. commutativité : $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b = b+a$ et $ab = ba$.
4. existence d'éléments neutres : $0 + x = x$ et $1x = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
5. distributivité : $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow a(b+c) = ab+ac$.
6. $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + x = b$ possède une unique solution.
7. $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow ax = b$ possède une unique solution pour $a \neq 0$.
8. Pour $a, b, c \in \mathbb{Q}$ si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.
9. Pour $a, b, c \in \mathbb{Q}$ avec $c \geq 0$, on a que si $a \leq b$ alors $ac \leq bc$.
10. $1 > 0$.
11. $\mathbb{Q}$ est Archimédien : Pour $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $an > b$.

Pour résumer, on dit que $\mathbb{Q}$ est un corps ordonné Archimédien.

Définition 1.1. *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et* $A \subseteq E$. *Un majorant pour* A *est un élément* $M \in E$ *tel que* $x \leq M$ *pour tout* $x \in A$. *De même un minorant pour* A *est un élément* $m \in E$ *tel que* $m \leq x$ *pour tout* $x \in A$.

Un ensemble $A \subseteq E$ est dit *borné inférieurement* (respectivement *borné supérieurement*) s'il possède un minorant (respectivement un majorant). Un ensemble est dit *borné* s'il possède à la fois un minorant et un majorant.

Si $A \subseteq E$ est borné, alors parmi tous les majorants de A, il se peut qu'il en existe un qui soit minimal. De même, parmi les minorants de A il se peut qu'il y en ait un qui soit maximal.

Définition 1.2. *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et* $A \subseteq E$. *On appelle le plus petit majorant de* A *le suprémum de A, noté* $\sup A$. *On appelle le plus grand minorant de* A *l'infimum de* A, *noté* $\inf A$.

Il est évident que si $\sup A$ (resp. $\inf A$) existe, alors il est unique.

Il existe des parties bornées $A \subseteq \mathbb{Q}$ qui ne possède pas de suprémum ou d'infimum. Par exemple, l'ensemble borné $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ ne possède pas de suprémum. Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que $\alpha = \sup A$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$. On va d'abord montrer que $\alpha^2 = 2$. En fait, si $\alpha^2 < 2$ alors on pose $x = \alpha + \epsilon$ avec $\epsilon = \min\{1, \frac{2-\alpha^2}{6}\}$. Vu que $\alpha \leq 2$, on a

$$x^2 = (\alpha + \epsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\epsilon + \epsilon^2 \leq \alpha^2 + 5\epsilon < \alpha^2 + 5(\frac{2 - \alpha^2}{5}) = 2$$

et donc $x \in A$, une contradiction. De même, si $\alpha^2 > 2$, alors on peut montrer que $\beta^2 > 2$ où $\beta = \alpha - \frac{\alpha^2-2}{6}$. Et donc, β est un majorant de A plus petit que α, une contradiction. Ayant montré que $\alpha^2 = 2$, on en déduit qu'il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $\frac{m^2}{n^2} = 2$. L'égalité $m^2 = 2n^2$ implique que m est pair et donc $m = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Cela donne $4k^2 = 2n^2$ ou encore $2k^2 = n^2$ qui implique que n est pair, une contradiction vu que m et n sont premiers entre eux.

2 Les nombres réels

Nous venons de voir que le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est lié au fait que l'ensemble borné $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ n'admet pas un suprémum dans $\mathbb{Q}$. Cela entraîne d'autres conséquences. Par exemple, le Théorème des Valeurs Intermédiaires ne s'applique pas en générale aux fonctions continues définies sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, l'application $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ donnée par $f(x) = x^2$ est bien continue. De plus, on a que $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$. Néanmoins, il n'existe pas $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = 2$. De manière intuitive, dans $\mathbb{Q}$ il y a des trous. Ces trous seront bouchés par l'ensemble des nombres réels.

Définition 2.1. *Un ensemble $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ est appelé une coupure de Dedekind dans $\mathbb{Q}$ si*

1. *$\alpha \neq \emptyset$ et $\alpha \neq \mathbb{Q}$;*
2. *Pour tout $a \in \alpha$ il existe $b \in \alpha$ avec $b > a$;*
3. *Si $a \in \alpha$ et $x < a$ alors $x \in \alpha$.*

Définition 2.2. *L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ est l'ensemble de toutes les coupures de Dedekind dans $\mathbb{Q}$.*

La Définition 2.1 donne une vision intuitive d'une coupure de Dedekind dans $\mathbb{Q}$ comme une sorte de demi-intervalle de rationnels sur la "droite réelle", borné à droite et n'ayant pas d'élément maximal. En fait, comme $\alpha \neq \emptyset$, il existe $a \in \alpha$ et d'après 2. tout $x < a$ appartient à α. De plus, vu que $\alpha \neq \mathbb{Q}$ il existe un $b \notin \alpha$ et de plus, tout rationnel $c > b$ n'appartient pas à α. On a donc que α est borné supérieurement. Finalement la propriété 3. dit que cet ensemble borné supérieurement ne possède pas d'élément maximal. Il faut imaginer un nombre réel α comme le suprémum de la coupure de Dedekind définie par α. Par exemple, $\sqrt{2}$ correspond à la coupure $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$.

Exercice 2.3. *Montrer que $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ est une coupure de Dedekind dans $\mathbb{Q}$.*

Un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ correspond à la coupure de Dedekind $\alpha(r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$. La correspondance $r \leftrightarrow \alpha(r)$ permets d'identifier $\mathbb{Q}$ avec un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant munir l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre ainsi que d'opérations d'addition et de multiplication en sorte que $\mathbb{R}$ devient un corps ordonné Archimédien. La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ est la suivante :

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

L'inégalité stricte $\alpha < \beta$ correspond à $\alpha \subset \beta$.

Lemme 2.4 (Principe de trichotomie dans $\mathbb{R}$)**.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors trois possibilités mutuellement exclusives existent : $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.*

Démonstration. Par définition on a que $\alpha = \beta$ exclut $\alpha < \beta$ et $\beta < \alpha$. Montrons que $\alpha < \beta$ et $\beta < \alpha$ sont mutuellement exclusives. Si $\alpha < \beta$ alors il existe $b \in \beta$ avec $b \notin \alpha$. Cela implique que $\beta \not\subseteq \alpha$ et donc en particulier $\beta \not< \alpha$. Finalement montrons qu'une des trois relations doit être vraie pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \not< \beta$. Cela revient à dire que $\alpha \not\subseteq \beta$ et donc il existe $a \in \alpha$ avec $a \notin \beta$. Soit $b \in \beta$. Alors $b < a$ autrement par 3. on aurait $a \in \beta$. Finalement 3. implique que $b \in \alpha$ et donc $\beta \subset \alpha$. $\square$

Notons que cette relation d'ordre coïncide avec la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{Q}$: Pour $r, s \in \mathbb{Q}$ on a que $r \leq s$ ssi. $\alpha(r) \leq \alpha(s)$.

L'opération d'addition sur $\mathbb{R}$ se définit de la façon suivante : Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on pose

$$\alpha + \beta = \{a + b : a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

On vérifie facilement que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ et que l'addition de coupures de Dedekind est à la fois associative et commutative. L'élément neutre pour cette addition est donné par la coupure $\alpha(0)$, notée O. Les réels tels que $\beta \leq O$ (respectivement $\beta < O$) sont dits négatifs (respectivement strictement négatifs), alors que les $\beta \geq O$ sont dits positifs (et les $\beta > O$ sont dits strictement positifs). On pose $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > O\}$.

Chaque $\alpha \in \mathbb{R}$ admet un unique inverse additif donné par la coupure

$$(-\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{Q} : \exists r > 0 \text{ tel que } -x - r \notin \alpha\}.$$

Exercice 2.5. *Vérifier que si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $(-\alpha) \in \mathbb{R}$ et que $\alpha + (-\alpha) = O$.*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq O \\ (-\alpha) & \text{si } \alpha < O). \end{cases}$$

Pour définir la multiplication de deux coupures $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on considère d'abord le cas où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$: Alors

$$\alpha \cdot \beta \overset{\text{déf}}{=} \{p : \exists a \in \alpha,\ \exists b \in \beta \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ et } p \leq ab\ \}.$$

Exercice 2.6. *Vérifier que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, alors $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^+$.*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $\alpha \cdot O = O \cdot \alpha = O$. Finalement pour deux coupures α, β générale on pose

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} |\alpha||\beta| & \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ ont le même signe} \\ (-|\alpha||\beta|) & \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ ont des signes opposés} \end{cases}$$

Exercice 2.7. *Vérifier que si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \cdot \alpha(1) = \alpha(1)\alpha = \alpha$. C'est à dire que $\alpha(1)$ est l'élément neutre par rapport à la multiplication.*

Exercice 2.8. *Vérifier formellement que $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ est un corps ordonné Archimédien et que dans le cas des coupures rationnelles ceci correspond précisément à ce que l'on connaissait déjà.*

Nous considérons maintenant une coupure $\mathcal{A}$ de réels, c'est-à-dire un sous-ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ tel que

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}$;
2. Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ il existe $\beta \in \mathcal{A}$ avec $\alpha < \beta$;
3. Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ si $\beta < \alpha$ alors $\beta \in \mathcal{A}$.

Alors on a le résultat suivant :

Theorem 2.9 (Théorème de complétude des réels)**.** *Toute coupure $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ admet un suprémum dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une coupure de réels. On pose

$$\beta = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \alpha.$$

Exercice 2.10. *Vérifier formellement que $\beta \in \mathbb{R}$.*

Par définition de β et de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ on a que $\beta \geq \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ qui revient à dire que β est un majorant de $\mathcal{A}$. Montrons finalement que β est le plus petit majorant de $\mathcal{A}$, c'est à dire que $\beta = \sup \mathcal{A}$. Soit β' un majorant de $\mathcal{A}$. Alors on a que $\beta' \geq \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et donc $\beta = \bigcup \mathcal{A} \subseteq \beta'$. Donc on a bien que $\beta \leq \beta'$ qui montre que $\beta = \sup \mathcal{A}$. □

De manière plus générale :

Theorem 2.11. *Soit $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide borné supérieurement. Alors $\mathcal{S}$ admet un suprémum dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On pose

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists \beta \in \mathcal{S} \text{ avec } \alpha < \beta\}.$$

Exercice 2.12. *Vérifier formellement que $\mathcal{A}$ est une coupure de réels.*

Par le théorème précédent $\sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}$. Si on pose $\alpha = \sup \mathcal{A}$, alors on a que $\alpha \notin \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est une coupure) et donc par définition de $\mathcal{A}$ on a que $\alpha \geq \beta$ pour tout $\beta \in \mathcal{S}$. C'est à dire, α est un majorant de $\mathcal{S}$. De plus il est évident que α est le plus petit majorant de $\mathcal{S}$ car si $\alpha' < \alpha$, alors vu que $\alpha = \sup \mathcal{A}$ il existe $\alpha'' \in \mathcal{A}$ avec $\alpha' < \alpha''$ et donc, par définition de $\mathcal{A}$ il existe $\beta \in \mathcal{S}$ avec $\alpha' < \alpha'' < \beta$ qui montre que α' n'est pas un majorant de $\mathcal{S}$.

□

Désormais, on va considérer l'ensemble $\mathbb{R}$ comme un corps ordonné Archimédien qui vérifie la propriété de la borne supérieure : Tout sous-ensemble $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ borné supérieurement admet un suprémum dans $\mathbb{R}$. On dit aussi que $\mathbb{R}$ est *complet*.

3 Liens et différences entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

La correspondance $r \leftrightarrow \alpha(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$ permets d'identifier $\mathbb{Q}$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Désormais, pour $r \in \mathbb{Q}$ nous allons écrire r à la place de $\alpha(r)$. Par exemple, on écrit $r < \beta$ à la place de $\alpha(r) < \beta$ pour $r \in \mathbb{Q}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha < r < \beta$.*

Démonstration. Soit r un élément de β n'appartenant pas à α. Alors on a que $\alpha < r < \beta$. $\square$

Une première différence importante entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est donnée par le Théorème 2.11.Une deuxième différence fera intervenir la notion de cardinalité.

Définition 3.2. *Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B ont la même cardinalité, noté $|A| = |B|$, si et seulement si A et B sont en bijection. Un ensemble A est dit fini s'il est vide ou en bijection avec $\{1, 2, \ldots, n\}$ pour un certain entier positif n. Autrement on dit que A est infini. Un ensemble infini A est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Autrement on dit que A est non-dénombrable.*

Exemple 3.3. *L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ donnée par*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ -\frac{n-1}{2} & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$$

est bijective. Ainsi $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable.

Exercice 3.4. *Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Proposition 3.5. *Soit A un ensemble infini inclus dans un ensemble B dénombrable. Alors A est dénombrable.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \to B$ une application bijective. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $b_n = f(n) \in B$. On a donc $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$. On pose n_0 le plus petit entier dans $\mathbb{N}$ tel que $b_{n_0} \in A$. Ayant défini $n_0, n_1, \ldots, n_k$ avec $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ et avec $b_{n_j} \in A$, on pose n_{k+1} le plus petit entier plus grand que n_k avec $b_{n_{k+1}} \in A$. Or, l'application $g : \mathbb{N} \to A$ définie par $g(k) = b_{n_k}$ est bijective. $\square$

Proposition 3.6. *Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles dénombrables. Alors $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ est dénombrable.*

Démonstration. Comme dans la proposition précédente, pour chaque $n \geq 1$, on peut écrire $S_n = \{s_{n0}, s_{n1}, s_{n2}, \ldots\}$. On peut donc ordonner les éléments de S (avec peut être des répétitions) sous la forme d'un carré de longueur infinie comme dans le tableau ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
s_{10} \arrow[r] & s_{11} \arrow[dl] & s_{12} \arrow[r] & s_{13} \arrow[dl] & \cdots \\
s_{20} \arrow[d] & s_{21} \arrow[ur] & s_{22} \arrow[dl] & s_{23} & \cdots \\
s_{30} \arrow[ur] & s_{31} \arrow[dl] & s_{32} & s_{33} & \cdots \\
s_{40} & s_{41} & s_{42} & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Ce carré infini sur la droite et vers le bas possède des diagonales de longueur k. On peut donc énumérer tous les éléments du tableau de la manière suivante :

$$s_{10}, s_{11}, s_{20}, s_{30}, s_{21}, s_{12}, s_{13}, \ldots.$$

Cette liste contient tous les éléments de S, et donc il existe une partie infinie T de $\mathbb{N}$ qui est en bijection avec S. D'après la proposition précédente, T est dénombrable et donc en bijection avec $\mathbb{N}$. Il en suit que S est en bijection avec $\mathbb{N}$, et donc S est dénombrable. $\square$

Proposition 3.7. *Soit A un ensemble. Alors A et $\mathcal{P}(A)$ n'ont pas la même cardinalité.*

Démonstration. Soit $f : A \to \mathcal{P}(A)$ une application de A vers $\mathcal{P}(A)$. Alors la partie A' de A définie par

$$A' = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

n'est pas dans l'image de f qui montre que f n'est pas surjective. $\square$

Corollaire 3.8. *L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non-dénombrable.*

Proposition 3.9. *On pose $E = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \{0, 1\}\}$. Alors E est non-dénombrable.*

Démonstration. Soit S une partie de E dénombrable. On peut donc écrire $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ où chaque $s_n \in E$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on note la $n$ème coordonné de s_m par s_{mn}. On va définir une suite $s \in E$ de la manière suivante : La $n$ème coordonné de s est égal à $1 - s_{nn}$. Par définition $s \in E$ mais $s \notin S$ car pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la $n$ème coordonné de s et de s_n sont différents. En en déduit que si S est une partie de E dénombrable, alors $S \subset E$. Cela montre que E n'est pas dénombrable.

$\square$

En utilisant la représentation binaire des nombres réels, on voit que la proposition précédente implique que $\mathbb{R}$ est non-dénombrable.