
CC3

VENDREDI 22 NOVEMBRE 2019 – DURÉE 60 MINUTES

Exercice 1.

1. Donner la définition de groupe cyclique.
2. Soient G_1, G_2 deux groupes, avec quelle loi $G_1 \times G_2$ devient un groupe ?
3. Quel est l'ordre de l'élément $(\bar{2}, \bar{2})$ dans le groupe $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$? Est-ce que $(\bar{2}, \bar{2})$ est un générateur de G ? Est-ce que G est cyclique ?
4. Trouver tout les sous-groupes de G .

Exercice 2.

Soit G un groupe dans lequel chaque élément est d'ordre 2. Montrer que G est commutatif.

Exercice 3.

1. Donner la définition d'un idéal dans un anneau.
2. Soit $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (où $i^2 = -1$). Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau. Est-ce que il est intègre ?
3. On pose $N(a + bi) := a^2 + b^2$. Montrer que $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$
4. En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
5. Est-ce que l'application $\varphi : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$a + bi \mapsto a + b$$

est un morphisme d'anneaux ?