Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement — 8 Décembre 2020. Durée : 1 h 30

Contrôle continu n° 2

Les documents manuscrits sont autorisés, ainsi que les polys de cours et les fiches de TD.

Exercice 1. Soit I un intervalle réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. On suppose que f admet trois points fixes distincts $(a, b, c) \in I^3$ vérifiant $a < b < c$.
En utilisant la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$, montrer qu'il existe $x \in]a, c[$ tel que $f''(x) = 0$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série de terme général (u_n) dans les cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n - \dfrac{n}{n+1}e^a$. On discutera de la nature de la série en fonction de la valeur du réel a.

Exercice 3. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$ et telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$. On suppose $b - a \leq 1$.
On pose :

$$F : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}.$$

1. (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer que f' admet un minimum sur $[a, b]$, que $|f''|$ admet un maximum sur $[a, b]$ et que :
   $$\min_{x\in[a,b]} f'(x) > 0.$$
   On note $C = \dfrac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} f'(x)}$. On suppose désormais $C < 2$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $z \in]\min(\alpha, x), \max(\alpha, x)[$ tel que :
   $$f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha - x)^2}{2}f''(z).$$
   Et en déduire que :
   $$F(x) - \alpha = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x - \alpha)^2.$$
   (d) En déduire que :
   $$\forall x \in [a, b], \qquad |F(x) - \alpha| \leq \frac{C}{2}|x - \alpha|.$$
2. Soit $\delta > 0$ tel que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ soit inclus dans $[a, b]$. On se donne $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, de sorte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = F(u_n)$$
   soit bien définie.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{C}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 4. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.