Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

L3 - Algèbre et Mathématiques Discrètes

CC2 - Le 05 novembre 2019 de 14h00 à 15h00

Exercice 1 (7 points)**.** Soit a un entier naturel impair.

1. Démontrer que $a^2 \equiv 1\ [8]$.
2. Démontrer que $a^4 \equiv 1\ [16]$.
3. Démontrer que si $a \equiv 1\ [2^n]$, alors $a^2 \equiv 1\ [2^{n+1}]$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $a^{2^{n-2}} \equiv 1\ [2^n]$.

Exercice 2 (3 points)**.** Trouver, s'il existe, une solution entière comprise entre 100 et 200 du système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 1\ [8]; \\ x \equiv 3\ [7]. \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)**.**

1. Rappeler la définition de groupe.
2. Soit $*$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par

$$a * b := ab + a + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

   Est-ce que $*$ est associative ? Commutative ?
3. Trouver tous les sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, et donner leur ordre.

Exercice 4 (5 points)**.** Dans le groupe symétrique S_7 on considère les deux permutations

$$\sigma = (1,4,5,2,3,6) \circ (5,4,7,6) \circ (2,3,4) \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ et τ comme produit de cycles disjoints.
2. Calculer les ordres de σ et τ.
3. Quelle est la signature de $\pi = \sigma \circ \tau$?
4. Écrire π^{-1} comme un produit de transpositions.
5. Est-ce que σ et τ sont conjuguées ?