Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

L3 - Algèbre et Mathématiques Discrètes

CC1 - Le 11 octobre 2019 de 8h00 à 9h30

Exercice 1.

1. Combien y a-t-il de multiples de 5 parmi les nombres de trois chiffres, avec chiffres tous impairs et deux à deux distincts ?
2. Dans une classe de 20 étudiants, il faut former deux équipes : une équipe de foot de 11 joueurs et une équipe de basket de 5 joueurs. Combien y a-t-il de façons de former ces équipes si aucun des joueurs ne peut appartenir aux deux équipes ?
3. Combien d'entiers $k \leq 70$ sont premiers avec 70 ?
4. Soient n et k deux entiers fixés, Donner une démonstration combinatoire de l'identité suivante
$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 2. On pose $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit
$$A_n := \{f : [n] \longrightarrow [n] \mid f^2 = f\}.$$

1. Calculer $|A_2|$ et $|A_3|$ en listant les éléments de A_2 et A_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^{n-i} \binom{n}{i}$.
Indication : on pourra identifier i avec le cardinal de $Im(f)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ fixé et soient a, b et n trois entiers relatifs.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrez que si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^k \equiv b^k\ [n]$.
2. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k \equiv b^k\ [n]$, peut-on en déduire que $a \equiv b\ [n]$?
3. Calculer le reste de la division de 2019^{2019} par 3 et par 5.

Exercice 4. Soit p un nombre premier.

1. Montrez que pour tout $k = 1, \ldots, p-1$
$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$
En déduire que pour tout $k = 1, \ldots, p-1$, $\displaystyle\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. En déduire que pour tous entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$,
$$(a+b)^p - a^p - b^p \text{ est divisible par } p.$$
3. Démontrer par récurrence que pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p - a$ est divisible par p.
4. Calculer le reste de la division de 2019^{2019} par 11.