

Feuille d'exercices numéro 9
Changements de variables — Exercices de révision

Exercice 1 On rappelle que pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que $\forall x > 0, \forall y > 0$, l'application $t \rightarrow t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ -intégrable sur $[0, 1]$. On pose pour $x > 0$ et $y > 0$: $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.
2. Soient $x > 0, y > 0$ et $I = \int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dsdt$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans \mathbf{R}^2 : $u = t$ et $v = t + s$.
3. En calculant I d'une autre manière, établir la formule pour $x, y > 0$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exercice 2 Pour $n \geq 1$, soit $U_n = \{x \in \mathbf{R}^n, \text{ t.q. } x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + \dots + x_n < 1\}$. Soit $S_n = \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1} . En déduire la valeur de S_n .

Exercice 3

1. Soit $H : (u, v) \rightarrow (s, t)$ avec $s = uv$ et $t = u(1-v)$. Montrer que H est un C^1 -difféomorphisme de l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, 1[$ sur l'ouvert $V = (\mathbf{R}_+^*)^2$.
2. Soit $x > 0, y > 0$ et

$$I = \int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+} s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}dsdt.$$

En utilisant le changement de variables H , calculer I et retrouver la formule établie à l'exercice 1.

Exercice 4 (examen janvier 2007, 2ème session)

Soit λ_2 la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 . Soit $0 \leq a < b$. On pose

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } 0 < x < y < \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

(a) Montrer que D est un borélien.

(b) A l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = y^2 - x^2 \\ v = xy \end{cases}$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I = \int_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) d\lambda_2(x, y)$ en fonction de a et b .

Exercice 5 (examen juin 2007)

Soit U la partie de \mathbf{R}^3 définie par

$$U = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.q. } u > 0, v > 0, w > 0 \text{ et } uv < 1, uw < 1, vw < 1\}$$

(1) Montrer que U est borélien.

(2) On note λ_3 la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^3 . Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_U uvw d\lambda_3(u, v, w).$$

On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) = (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une application borélienne. On fixe $a, b, c > 0$ et on note

$$I_{a,b,c} = \int_{(\mathbf{R}^+)^3} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}f(x+y+z)dx dy dz.$$

1. Soit $H : (x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ avec $u = x + y + z$, $v = \frac{x}{x+y}$ et $w = \frac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1 -difféomorphisme de $(\mathbf{R}_+^*)^3$ sur un ouvert V de \mathbf{R}^3 à expliciter.
2. En utilisant H et la formule établie à l'exercice 1, en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^\infty f(u)u^{a+b+c-1} du$$

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit l'intégrale

$$J = \int_{(\mathbf{R}_+^*)^3} \frac{dx dy dz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$

A quelle condition sur α, β, γ l'intégrale J est-elle finie ?

4. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.q. } x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. En utilisant la question 2, calculer

$$L = \int_B |x|^{a-1} |y|^{b-1} |z|^{c-1} dx dy dz.$$

Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice 7 (examen janvier 2007, 1ère session)

Partie 1

Pour $a > 0$ et $x \geq 0$, on pose $H_a(x) = \int_0^\infty e^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})} dt$. On rappelle que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

- (a) Montrer que la fonction $H_a : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ est continue.
- (b) Calculer $H_a(0)$.
- (c) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- (d) Calculer, pour $x > 0$, $H'_a(x)$ en fonction de $H_a(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{\alpha}{s}$ avec α convenablement choisi).
- (e) En déduire que $H_a(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}}$, $a > 0$, $x \geq 0$.

Partie 2

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 . On rappelle que la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0.$$

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$J(\alpha) = \int_{(\mathbf{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2 + \frac{x}{y^2})} x^{\alpha-\frac{1}{2}} d\lambda_2(x, y).$$

- (a) En utilisant la partie 1, montrer que $J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha)$.
- (b) En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x/y^2 \end{cases}$ (que l'on justifiera), montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

- (c) En déduire la formule $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}} \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice 8 (examen juin 2007, 2ème session)

On rappelle qu'on note λ_2 la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 , et que la fonction "cosinus hyperbolique" est définie par $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$.

1) On se donne les trois intégrales

$$A = \int_{\mathbf{R}_+^2} \frac{d\lambda_2(s, t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad B = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(s, t)}{\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t}, \quad C = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d\lambda_2(u, v)}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}$$

(a) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

(b) En faisant le changement de variables $s = u - v, t = u + v$, prouver que $B = C$ et donner la valeur de A .

2) On considère la fonction $H : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-x \operatorname{ch} t) dt.$$

(a) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, +\infty[$. Déterminer les limites de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Vérifier que $\int_0^{+\infty} H(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

(c) En utilisant l'intégrale A de la partie 1, montrer que $\int_0^{+\infty} H(x)^2 dx = \frac{\pi^2}{4}$.