Feuille d'exercices numéro 6
Théorème de convergence dominée.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction μ-intégrable.
1) Pour $n \geqslant 0$, soit $A_n = \{x \in X \text{ t.q. } |f(x)| \geqslant n\}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f d\mu$.
2) On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. On fixe $A \in \mathscr{T}, \mu(A) < +\infty$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_A f^{1/n} d\mu$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que f est λ-intégrable. Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \exp(-n \sin^2 x) f(x) dx.$$

Exercice 3 Montrer que les fonctions suivantes sont λ-intégrables sur I et déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n d\lambda$
a) $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$ où $1 < \alpha < 2$.
b) $I = [A, +\infty[$ où $A > 0$ et $f_n(x) = \dfrac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$.
c) $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[}(x)$.

Exercice 4 On pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx) \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.
a) Déterminer la limite simple (notée f) de la suite (f_n).
b) Justifier que, $\forall u \geqslant 0, 1 - u \leqslant \exp(-u)$.
c) En déduire que la suite $(\int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx)_n$ converge et que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$ et $\int_{\mathbf{R}} \exp(a|t|) d\mu(t) < +\infty, \forall a \geqslant 0$.
a) Montrer que $t \longmapsto t^n$ est μ-intégrable pour tout entier positif n.
b) Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $t \longmapsto \exp(zt)$ est μ-intégrable.
c) On pose $F(z) = \int_{\mathbf{R}} \exp(zt) d\mu(t)$. Montrer que F a un développement en série entière de la forme
$$F(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n,$$
où l'on explicitera les coefficients (a_n).

Exercice 6 Soit μ une mesure finie sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose
$$m_k = m_k(\mu) = \int_{[0,1]} t^k d\mu(t).$$
a) Déterminer $\lim_{k\to\infty} m_k$.
b) Pour $\gamma > 0$, $p \in \mathbf{N}$, $a \in]0,1]$, on pose
$$J_p(\gamma, a) = \int_{[0,1]} \exp\left(-\gamma (t/a)^p\right) d\mu(t).$$

Montrer que

$$J_p(\gamma, a) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\gamma^k}{a^{pk}} m_{pk}.$$

c) Déterminer $\lim_{p\to\infty} J_p(\gamma, a)$.
d) Soient μ et ν deux mesures finies sur $[0,1]$ vérifiant $m_k(\mu) = m_k(\nu), \forall k \in \mathbf{N}$. Déduire de ce qui précède que pour tous a, b dans $[0,1]$ vérifiant $a < b$, on a $\mu([a,b[) = \nu([a,b[)$.
e) En déduire que $\mu = \nu$.

Exercice 7 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré ; on suppose que la mesure μ est finie. Soit $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction $\mathscr{T}-$ mesurable et, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_X \frac{f^n}{1+f^n} d\mu$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 8 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{R}^+$ une fonction telle que, pour tout $n \geqslant 1$, f^n est $\mu-$ intégrable. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$, $B = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > 1\}$ et $J_n = \int_X f^n d\mu$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (b) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.
   (c) $\mu(B) = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (d) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} J_n$ est convergente.
   (e) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (f) $\mu(A) = 0$.

Exercice 9 (*) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)$, $g_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^{1/2} f_n(x)$, $I_n = \displaystyle\int_0^\infty f_n(x)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^\infty g_n(x)dx$.

1. Montrer que $I_n J_n = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Exercice 10 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions $\mu-$ intégrables convergente vers 0 μ-pp. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n\right) d\mu.$$

On pourra utiliser les résultats du cours de L2 sur les séries alternées.

Exercice 11 (**Examen juin 2007**) On considére pour $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$, les fonctions $f_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, f_n est Lebesgue-intégrable sur $]0, +\infty[$.
(2) Démontrer que pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, on a $f_n(x) \leqslant \frac{4}{x^2}$.
(3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.