Université Claude Bernard
L3 Calcul intégral

Mathématiques

Feuille d'exercices numéro 4
Mesure de Lebesgue. Intégration.

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle les définitions suivantes :
- une partie A de E est *μ-négligeable* si elle est contenue dans une partie B μ-mesurable qui a une mesure nulle (i.e. $\exists B \in \mathscr{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$) ;
- une propriété $P(x)$ est vraie *μ-presque partout* (μ-p.p.) si la partie $\{x \in E$ t.q. $P(x)$ est fausse$\}$ est μ-négligeable.

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?

(1) Si A est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbf{R}$ et $\lambda(A) > 0$ alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbf{R}$ tel que $U \subset A$.
(2) Si $B \subset \mathbf{R}$ est une partie Lebesgue-mesurable, et $A \subset B$, alors A est Lebesgue-mesurable.
(3) Si A est une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbf{R}$ et $\lambda(A) < +\infty$ alors A est bornée.
(4) Soit $\mathcal{C}$ une tribu qui engendre $\mathcal{T}$, et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathcal{T}$. On suppose que pour tout C dans $\mathcal{C}$ on a $\mu_1(C) = \mu_2(C)$. Alors pour tout T dans $\mathcal{T}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.
(5) Si $\mu(E) < \infty$ et $(E_n)_{n\geq 0}$ est une suite de sous-ensembles de E tels que $\mu(E_n) = \mu(E)$ pour tout n, alors on a $\mu(\cap_{n\geq 0} E_n) = \mu(E)$.
(5) Si $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\int f d\mu = \mu(A)$.
(6) Si $f : E \to [0, +\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0$, alors f est intégrable.
(7) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 2 (Partiel avril 2007)

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ qui vérifie les conditions suivantes :
(C_1) $\forall x \in \mathbf{R}, \mu(\{x\}) = 0$.
(C_2) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a, b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$ vérifie-t-elle ces conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mu(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$. Montrer que $\mu(\mathbf{Q}) = 0\cdot$
3. Soit $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On définit la fonction f_A comme suit :
$$f_A : \begin{cases} \mathbf{R} \to [0, +\infty[\\ x \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{cases}$$
Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer $f_A(x)$ pour $A = \mathbf{Q}$.
4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbf{R}$. Même question pour $A = [0, 1]$ (il est inutile de justifier le tracé des graphes).

Exercice 3

1. Soit B une partie de $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe $b \in B$ tel que $x - b \in \mathbf{Q}$. Montrer que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) > 0$.
2. Soit B une partie de $[0, 1]$ telle que pour tout $x \neq y \in B$, $x - y \notin \mathbf{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de translatés de B inclus dans $[0, 2]$ et deux à deux disjoints. En déduire que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) = 0$.
3. Que peut-on dire d'une partie de $\mathbf{R}$ vérifiant les deux propriétés ci-dessus ? De quelle façon peut-on obtenir une telle partie de $\mathbf{R}$?

Exercice 4

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $f = g \ \lambda -$ p.p. $\iff f = g$.

3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère les deux propriétés suivantes :
(P1) : f est continue λ-p.p.
(P2) : Il existe une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p.p.
Donner l'exemple d'une fonction f_1 qui vérifie (P1) mais qui ne vérifie pas (P2), et d'une fonction f_2 qui vérifie (P2) mais qui ne vérifie pas (P1).
4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.
5. Soit A un borélien de $\mathbf{R}$. On définit l'application $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ par $f(x) = \lambda(A \cap [-x, x])$. Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$. En déduire que f est continue, puis que pour tout $t \in [0, \lambda(A)]$, il existe un borélien B tel que $B \subset A$ et $\lambda(B) = t$.

Exercice 5 Dans cette exercice, on montre en particulier que pour tout borélien A de $\mathbf{R}$,

$$\lambda(A) = \inf\{\mu(O) \colon O \text{ ouvert contenant } A\}.$$

I. Dans cette question, μ désigne une mesures diffuse sur $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) < +\infty$. On définit un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R})$ par

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \colon \forall \varepsilon > 0\ \exists F \text{ fermé, } O \text{ ouvert avec } F \subset A \subset O \text{ et } \mu(O \setminus F) < \varepsilon\}\ .$$

1. Montrer que pour tout $a < b \in \mathbf{R}$ on a $]a, b[\in \mathcal{T}$.
2. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu ; en déduire que $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est contenue dans $\mathcal{T}$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ on a

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \colon O \text{ ouvert contenant } A\}$$

II. On suppose cette fois que μ est une mesure diffuse sur $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que pour tout intervalle borné $[a, b]$ on ait $\mu([a, b]) < +\infty$, et on fixe $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

1. On définit $A_n = A \cap [n, n + 1[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $O_{n,\varepsilon}$ contenant A_n et tel que $\mu(O_{n,\varepsilon}) < \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$.
2. Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert O_ε tel que $A \subset O_\varepsilon$ et $\mu(O) \leq \mu(A) + \varepsilon$.
3. Montrer qu'on a $\mu(A) = \inf\{\mu(O) \colon O \text{ ouvert contenant } A\}$.

Exercice 6 Ecrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ lorsque :
(a) μ est une mesure de Dirac.
(b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$.

Exercice 7 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. Montrer que :
(a) $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty \Longrightarrow f < +\infty$ μ-p.p.
(b) $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0$ μ-p.p.

Exercice 8 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty[$ une application intégrable. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall A \in \mathscr{T} \qquad \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \varepsilon$$