Feuille d'exercices numéro 0
Opérations sur les ensembles. Dénombrement.

Opérations sur les ensembles (révisions !)

On travaille dans un ensemble X fixé. On désigne par A, B des parties de X, et par $(A_i), (B_i)$ des familles de parties de X indexées par un ensemble *quelconque* d'indices I. On désigne par A^c le complémentaire dans X de la partie A.

Exercice 1 Montrer les propriétés suivantes

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de parties de X, alors $\forall n_0 \in \mathbf{N}, \bigcup_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup_{n\geqslant n_0} A_n$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de parties de X, alors $\forall n_0 \in \mathbf{N}, \bigcap_{n\geqslant 0} A_n = \bigcap_{n\geqslant n_0} A_n$.
3. $A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$ et $A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i)$.
4. $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
5. $A \setminus (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\setminus B_i)$ et $(\bigcup_{i\in I} A_i)\setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i\setminus B)$.
6. $A \setminus (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\setminus B_i)$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i)\setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i\setminus B)$.

Exercice 2 Image directe, image réciproque

On se donne maintenant deux ensembles X et Y, et une application $f : X \to Y$. Si $A \subset X$, on définit $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \in B\}$. Montrer les relations suivantes

1. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
2. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
3. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
4. Si de plus g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Avec f les relations analogues ne sont pas vraies en général

1. Montrer que $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. Montrer que $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ et donner un contre-exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.
3. Montrer par un contre-exemple qu'aucune inclusion n'est vraie entre $f(A^c)$ et $f(A)^c$.

Exercice 3 Injectivité. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$.
3. $\forall x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

Exercice 4 Surjectivité. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective
2. $\forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. $\forall y \in Y$, $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice 5 Soient X un ensemble, A et B deux parties fixes de X.

1. Résoudre dans $\mathcal{P}(X)$ les équations suivantes en C
   (i) $A \cup C \subset B \cup C$. (ii) $A \cap C \subset B \cap C$. (iii) $(A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$.
2. On définit $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(C) = (A \cap C, B \cap C)$. Déterminer pour le couple (A, B) une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (i) injective. (ii) surjective.

Exercice 6 **Fonction indicatrice.** Soit X un ensemble. Pour une partie A de X, on définit sa *fonction indicatrice* $\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}$ par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
(1) Calculer $\mathbf{1}_\emptyset$ et $\mathbf{1}_X$. Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbf{R}$, calculer $\mathbf{1}_A^{-1}(Y)$.
(2) Exprimer simplement en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ les fonctions $\mathbf{1}_{A^c}, \mathbf{1}_{A\cap B}, \mathbf{1}_{A\cup B}$ (dans le cas général et dans le cas particulier où $A \cap B = \emptyset$), $\mathbf{1}_{A \triangle B}, \mathbf{1}_{f^{-1}(A)}$.
(3) Est-ce que l'application $A \mapsto \mathbf{1}_A$ est une bijection de $\mathscr{P}(X)$ dans $\{0,1\}^X$?
(4) Soit (A_n) une suite de parties de X et $A = \bigcup_n A_n$.
(a) Montrer que si la suite (A_n) est croissante (c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$), alors la suite $(\mathbf{1}_{A_n})$ est croissante et converge simplement vers $\mathbf{1}_A$.
(b) Si les A_n sont deux à deux disjoints, montrer que $\mathbf{1}_A = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$.

Dénombrabilité

Exercice 7 **Vrai ou Faux ?**
(1) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
(2) L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
(3) L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est dénombrable.
(4) $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ est dénombrable.

Exercice 8 Démontrer que les ensembles suivants sont dénombrables : $\mathbf{N}^*, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$.

Exercice 9 (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p_1, \dots, p_n$ n nombres premiers distincts. Montrer que $\mathbf{N}^n$ est dénombrable à l'aide de l'application $\phi : (k_1, \dots, k_n) \mapsto p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$
(b) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensemble dénombrables ?

Exercice 10 Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbf{Z}$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est dit *transcendant.* Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice 11 **R est indénombrable**.
(a) Montrons d'abord que l'ensemble $X = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ est indénombrable. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\phi : \mathbf{N} \to X$ est une bijection. On définit un élément $(u_n) \in X$ en posant $u_n = 1 - \phi(n)_n$. Pourquoi arrive-on a une contradiction ?
(b) Soit l'application $f : X \to \mathbf{R}$ définie par

$$f((u_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{10^n}.$$

Montrer que f est injective et en déduire que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 12 (*) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est au plus dénombrable.

Exercice 13 (*) Montrer que tout ouvert de $\mathbf{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.