1. S_n / A_n $\quad$ S_n permutations $= \{\sigma : \{1,\dots,n\} \xrightarrow[\text{bij}]{} \{1,\dots,n\}\}$

$n \geq 2$ $\quad$ A_n groupe alterné

$$= \{\sigma \in S_n : \text{sign}(\sigma) = 1\}$$

$$\text{sign} : S_n \to \{\pm 1\} \leftarrow \text{groupe multi.}$$

$$\text{sign}(\sigma\pi) = \text{sign}(\sigma)\,\text{sign}(\pi) \implies \text{morphisme}$$

Th. de factorisation : $S_n / \ker(\text{sign}) \simeq \text{Im}(\text{sign})$

$$\boxed{S_n / A_n \simeq \{\pm 1\}}$$

*	e	a
e	e	a
a	a	e

$O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R})$

$\det(M)$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : \boxed{{}^tM = M^{-1}}\} \qquad = \det(M)^{-1}$$

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \underline{\det M = 1}\}$$

$$\det : O_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \quad \text{morphisme}$$

donc $O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Im}(\det(O_n(\mathbb{R})))$

Si M est orthogonale, $\det(M) = \pm 1$

$\det\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1 \qquad O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\}$

$$O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq S_n / A_n$$

$GL_n(\mathbb{R}) = \{$matrices inversibles$\}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{$matrices de dét 1$\}$

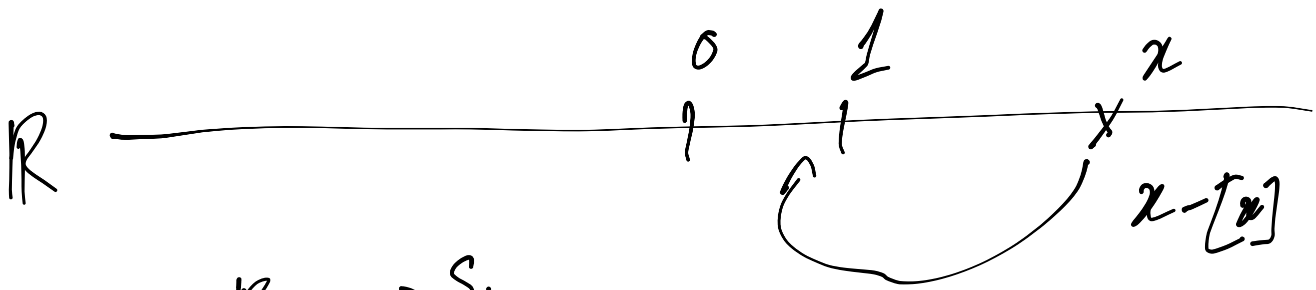
On a $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Im}(\det(GL_n(\mathbb{R})))$

$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \det\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda$

$$GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$$

$\mathbb{R}^* / \mathbb{R}^*_+ = \{\pm 1\} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^* &\to \{\pm 1\} \\ x &\mapsto |x|/x \end{aligned}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S_1$ $\qquad S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$



$\mathbb{R} \to S_1$

$x \mapsto e^{2i\pi x}$ morphisme

$e^{2i\pi(x+y)} = e^{2i\pi x} \times e^{2i\pi y}$

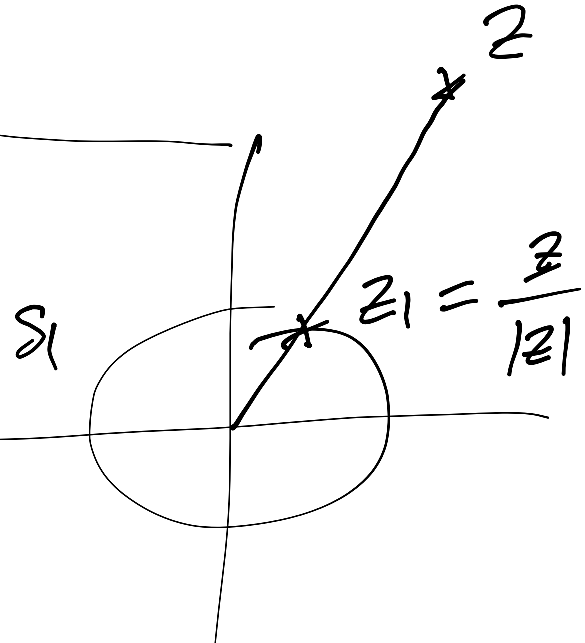
noyau $\mathbb{Z}$ image S_1

$\mathbb{R}^*/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}^*_+$ $\qquad \mathbb{R}^*/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{C}^*/S_1$

$x \mapsto |x|$

$\mathbb{C}^\times/S_1 \simeq \mathbb{R}^*_+$

$z \mapsto |z|$



G groupe, H sous-groupe de G

$H \sqsubseteq G$ (caractéristique) si $\forall \phi \in Aut(G)$, $\phi(H) \subseteq H$

1. $x \in G$ $\quad i_x : G \to G$

$$g \mapsto xgx^{-1}$$

i_x automorphisme :

- morphisme : $i_x(gh) = xghx^{-1} = xg\underbrace{x^{-1}x}\,hx^{-1}$

$$= i_x(g)\, i_x(h) \checkmark$$

- surjectif : $\forall h \in G$, $\exists g \in G$ tel que $i_x(g) = h$

on prend $g = x^{-1}hx$ $\checkmark$

- injectif : $g \in \ker i_x \iff i_x(g) = e$

$$\iff xgx^{-1} = e$$

$$\iff g = x^{-1}ex = e \checkmark$$

C'est un automorphisme intérieur

On suppose $H \sqsubseteq G$. En particulier, $\forall x \in G$,

$i_x(H) \subseteq H \iff \forall x \in G, xHx^{-1} \subseteq H$

$$\iff H \triangleleft G$$

2. Montrer $H \sqsubset K \sqsubset G \Rightarrow H \sqsubset G$

Soit $\phi \in Aut(G)$, on doit montrer que $\phi(H) \subseteq H$.

On pose $\psi = \phi_{|K}$ restriction à K

puisque $K \sqsubset G$, $\phi(K) \subseteq K$

d'où $\psi : K \longrightarrow K$ <u>auto</u>. de K

(attention à la surjectivité)

donc $H \sqsubset K$, on a $\underset{\underset{\displaystyle \phi(H)}{\|}}{\psi(H)} \subseteq H$ $\square$

3. $H \sqsubset K \lhd G \Rightarrow H \lhd G$

$\forall x \in G$, $i_x(H) \subseteq H$

on pose $\psi = i_x|_K$ <u>auto</u> de K

donc $\psi(H) \subseteq H$, ou encore $i_x(H) \subseteq H$. $\square$

Sous-groupe dérivé

G groupe $g, h \in G$ commutateur

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$$
$$(= g^{-1}h^{-1}gh)$$

On a $[g,h] = e$

$$\Leftrightarrow \boxed{gh = hg}$$

$$G' = [G,G] = \langle [g,h] ; g, h \in G \rangle$$

- $G' \triangleleft G$: $\leftarrow$ abelianisé de G
- Th : G/G' est abélien

c'est le plus grand quotient de G qui est abélien : si $H \triangleleft G$ avec G/H abélien

alors il existe morphisme $G/G' \to G/H$ surjectif

---

4. $Z(G) \triangleleft G$: on doit montrer

$$\forall \phi \in Aut(G), \quad \phi(Z(G)) \subseteq Z(G)$$

Soit $x \in \phi(Z(G))$, disons $x = \phi(z)$ avec $z \in Z(G)$

on doit montrer que $x \in Z(G)$; c'est-à-dire

$\forall g \in G, \ xg = gx$.

On calcule $xg = \phi(z) g$

$$= \phi(z)\phi(h)$$

$$= \phi(zh) = \phi(hz) \text{ car } z \in Z(G)$$

$$= \phi(h)\phi(z)$$

$$= gx. \qquad \square$$

il existe $h \in G$ avec $g = \phi(h)$ $[h = \phi^{-1}(g)]$

- $\underline{Int}(G) = \{ i_x : x \in G \}$ autos. intérieurs

c'est un sous-groupe de $Aut(G)$ car

$$i_x \circ i_y = i_{xy} \quad [$$

$$G \longrightarrow Int(G)$$

$$x \longmapsto i_x$$

morphisme surjectif

noyau : $x \in G$ tels que $i_x = \mathrm{Id}$

$\iff x \in G$ tels que $\forall g \in G \quad xgx^{-1} = g$

$\iff x \in G$ tels que $\forall g \in G \quad xg = gx$

$\iff x \in Z(G)$

donc $\quad G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$. $\square$