$$\Phi : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\phi(u) = \int_0^1 x\,u(x)\,dx$$

• Norme de ϕ pour $\|.\|_\infty$

Soit $u \in C([0;1];\mathbb{R})$

$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 x\,u(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 \underbrace{|x\,u(x)|}_{x|u(x)| \leq x\|u\|_\infty} dx$$
$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\|u\|_\infty$$

on a $(u \neq 0)$ $\quad \dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1/2 \quad \Rightarrow |||\phi|||_\infty \leq 1/2$

On cherche u telle que $|\phi(u)| = \frac{1}{2}\|u\|_\infty$

- $u = c \quad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$

$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 c\,x\,dx\right| = \frac{1}{2}|c| \qquad \|u\|_\infty = |c|$$

donc l'égalité est atteinte pour la fonction $u = 1$

$$\text{donc } |||\phi|||_\infty = 1/2 .$$

On considère à présent la norme $\|\cdot\|_1$ sur $C([0,1];\mathbb{R})$

$$|\phi(u)| = \left|\int_0^1 x\,u(x)\,dx\right| \qquad \|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 x\,|u(x)|\,dx \leq \underbrace{\int_0^1 |u(x)|\,dx}_{\|u\|_1} \quad \text{car } x \leq 1$$

$$\text{d'où } |||\phi|||_1 \leq 1$$

$u = c \quad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \quad : \quad |\phi(u)| = |c|$

$$\|u\|_1 = \frac{1}{2}|c|$$

$u = x^n \ (n \geq 1) \quad : \quad |\phi(u)| = \left|\int_0^1 x\,x^n\,dx\right| = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

$$= \frac{1}{n+2}$$

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |x^n| \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

d'où $\dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_1} = \dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $|||\phi|||_2 = 1$

2. $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ avec $\psi(P) = P'(0)$

$\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ norme

$P = c$ $\quad \psi(P) = 0$ et $\|P\| = |c|$

$P = X$ $\quad \psi(P) = 1$ et $\|P\| = 1$

$P = X^n$, $n \geq 2$ $\quad \psi(P) = 0$ et $\|P\| = 1$

- $P_n(X) = (X-1)^n \quad n \geq 1$

$P_n'(X) = n(X-1)^{n-1}$ donc $|\psi(P)| = n$

$$\|P\| = \sup_{x \in [0;1]} \left| (x-1)^n \right| = 1$$

donc $$\frac{\|\varphi(P)\|}{\|P\|} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

La norme subordonnée de φ n'existe pas car l'application linéaire φ n'est pas continue