$\delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$ avec $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$

1. δ est une distance : il faut montrer

- $\delta(x,y) = 0$ ssi $x = y$
- $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ ✓ par construction
- $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$ ✓ par construction

- $\Leftarrow$ si $x = y$, on a bien $\delta(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ si $\delta(x,y) = 0$; on considère deux cas : $x \in \mathbb{Q}$, $x \notin \mathbb{Q}$

.. $x \in \mathbb{Q}$: on a $f(x) = x$ d'où $f(y) = x \in \mathbb{Q}$

on a $f(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in \mathbb{Q} \\ 1-y & \text{si } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. En particulier $f(y) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y \in \mathbb{Q}$

donc $y \in \mathbb{Q}$ d'où $f(y) = y$ et finalement $x = y$.

.. $x \notin \mathbb{Q}$: raisonnement similaire : $f(y) = 1 - x \notin \mathbb{Q}$

donc $y \notin \mathbb{Q}$ et $f(y) = 1-y$ d'où $1 - y = 1 - x$

$\rightarrow x = y$.

- $u_n = \sqrt{2}/n$ avec $n \geq 1$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ pour la distance d

On remarque que $f(u_n) = 1 - \sqrt{2}/n$ pour tout $n \geq 1$.

On cherche s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ avec

$$\delta(u_n, \ell) = |f(u_n) - f(\ell)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On voit que $\ell = 1$ convient,

on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ pour la distance δ