Formule de Duhamel par variation de la constante

• éq. homogène $y' = ay$

Solution : $y_0(t) = C e^{A(t)}$ avec $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

• Solution générale

$$y(t) = C(t)\, e^{A(t)}$$

$$y'(t) = C'(t)\, e^{A(t)} + C(t)\, a(t)\, e^{A(t)}$$

On veut $y'(t) = a(t)\, y(t) + f(t)$

d'où
$$C'(t)\, e^{A(t)} + C(t)\, \cancel{a(t)}\, e^{A(t)} = a(t)\, \cancel{C(t)}\, e^{A(t)} + f(t)$$

donc $C'(t)\, e^{A(t)} = f(t)$

d'où $C(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s) e^{-A(s)} \, ds + k$

On veut la solution vérifiant $y(t_0) = y_0$

On calcule $y(t_0) = \left(\cancel{\displaystyle\int_{t_0}^{t_0} f(s) e^{-A(s)} \, ds} + k \right) \underbrace{e^{A(t_0)}}_{=1} = k$

donc on prend $k = y_0$

et on retrouve bien la formule de Duhamel.

3. Solution maximale

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -1/t^3 & t > 0 \\ \\ y(1) = 1 & a(t) = -1/t^2 \quad f(t) = -1/t^3 \\ & t_0 = y_0 = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = \underbrace{e^{A(t)}}_{e^{1/t - 1}} + \underbrace{\int_1^t e^{-A(s)} \frac{-1}{s^3} ds}$$

$$-\int_1^A \frac{e^{-1/s}}{s^3} ds \Leftarrow \text{IPP}$$

$$\ldots\ldots = \frac{e^{-1/t}}{t} + e^{-1/t} - 2e^{-1}$$

d'où $y(t) = 3e^{1/t - 1} - 1/t - 1$ définie $]0;+\infty[$