μ mesure de comptage sur $\left([0;1], \mathcal{B}([0;1])\right)$

1. $\Delta = \{(x,x) : x \in [0;1]\} \subseteq [0;1]^2$

On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y$ continue $\hookrightarrow$ mesurable

$\Delta = f^{-1}(\{0\}) \cap [0;1]^2$ ($f^{-1}(\{0\})$ mesurable, $[0;1]^2$ mesurable)

donc Δ est mesurable borélien de $\mathbb{R}^2$ et de $[0;1]^2$

2. Existence et calcul :

$$I_1 = \int_{[0;1]} \left(\int_{[0;1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

λ : mesure de Lebesgue

χ_Δ mesurable car Δ borélien

$\chi_\Delta \geq 0$ donc l'intégrale $\int_{[0;1]} \chi_\Delta\, d\lambda(x)$ existe $\forall y \in [0;1]$

et est positive et la fonction $y \mapsto \int_{[0;1]} \chi_\Delta\, d\lambda(x)$ est et donc I_1 existe

mesurable

$$\text{car} \int_{[0;1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) = 0$$

$$\chi_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $I_1 = 0$

$$I_2 = \int_{[0;1]} \left(\int_{[0;1]} \chi_\Delta \, d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

L'intégrale $\int_{[0;1]} \chi_\Delta \, d\mu(y)$ existe et elle vaut $\mu(\{x\}) = 1$ donc la fonction $y \mapsto 1$ est mesurable et $I_2 = 1$.

On a $I_1 \neq I_2$

3. Conclusion ?

μ n'est pas σ-finie donc Fubini ne s'applique pas

$\downarrow$

μ σ-finie : $\exists$ (A_n) de mesurables de $[0;1]$

avec $\operatorname{card} A_n < +\infty$ et $(A_n) \nearrow$ et $\bigcup_n A_n = [0;1]$

au plus dénombrable — non dénombrable

Contradiction