$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\,dx \qquad \text{Int. de Riemann}$$

1. Montrer F continue

• IR = IL :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$y \geq 0$

fonction continue ≥ 0

$$\left[\arctan x\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

fonction continue + IR conv. abs.

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\,dx = \int_{[0;+\infty[} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\,d\lambda$$

• On applique le th. de conv.

2. Calculer $F(0)$ et $\lim_{\infty} F(y)$

$$F(0) = \pi/2$$

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty} \int_{[0;+\infty[} \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}\,d\lambda$$

$$= \int_{[0;+\infty[} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}\,dx \quad \text{par conv. dominée}$$

$$\text{et } \lim_{y\to+\infty} e^{-x^2y} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$$

3. Montrer F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

. théorème du cours $\circledast$

4. Montrer F solution d'une équ. diff. du 1er ordre

avec $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

$$\text{On calcule } F'(y) = \int_{[0;+\infty[} \frac{-x^2 e^{-x^2y}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_{[0;+\infty[} \frac{-\cancel{(1+x^2)}\, e^{-x^2y}}{\cancel{1+x^2}}\,dx + \int_{[0;+\infty[} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\int_{]0,+\infty[} e^{-x^2 y}\, dx + F(y)$$

↑ changement de variable $u^2 = x^2 y$

$$F'(y) = -\frac{1}{\sqrt{y}} I + F(y)$$

5. Expression de $F(y)$ pour $y>0$.

On résoud par variation de la constante :

$$F(y) = I \cdot \int_{]y,+\infty[} \frac{e^{y-t}}{\sqrt{t}}\, d\lambda(t)$$

6. En déduire I

On a $F(0) = I \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, d\lambda(t)$

changt de variable $u = \sqrt{t}$

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, d\lambda(t) = 2I$$

donc $\underbrace{F(0)}_{= \frac{\pi}{2}} = 2I^2$

d'où $I = \sqrt{\pi}/2$