Normes sur $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R}) = E$

$A = \{ f \in E : f(0) = 0 \}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ $\quad \|f(x)\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}}$$

1. A fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$

A fermé ssi $\forall (f_n)$ suite convergente d'élts de A alors $\lim f_n \in A$

Soit (f_n) suite d'elements de A avec $\lim f_n = f$.

On montre que $f \in A$, c'est-à-dire $f(0) = 0$

On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geq N$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |f(0) - f_n(0)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |f(0)| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$

2. $f \in E$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(1/n)\, n x & \text{si } \boxed{0 \leq x \leq 1/n} \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. Les fonctions f_n sont continues

$\left(f(1/n) \cdot n \times \frac{1}{n} = f(1/n) \right)$

et $f(0) = f(1/n) \cdot n \cdot 0 = 0$ donc $f_n \in A$

2.2

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx$$

$$= \int_0^{1/n} \underbrace{|f(1/n) \cdot nx - f(x)|}_{\leq |f(1/n)\, nx| + |f(x)|}\, dx$$

$$\leq |f(1/n)\, n| \int_0^{1/n} x\, dx + \int_0^{1/n} \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty}\, dx$$

$$\leq \frac{1}{2n} \underbrace{|f(1/n)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \frac{1}{n} \|f\|_\infty$$

$$\leq \frac{3}{2n} \|f\|_\infty$$

3. A dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n} \|f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

nombre réel ≥ 0

donc $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} f$ d'où $f \in \overline{A}$

d'où $\overline{A} = E$

Question : A dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

4. Calculer $\mathring{A}$ pour $\|\cdot\|_\infty$, puis pour $\|\cdot\|_1$

- Soit $g \in \mathring{A}$ alors il existe $r > 0$ tel que

$B_\infty(g, r) \subseteq A$ avec $B_\infty(g, r) = \{f \in E : \sup\limits_{[0;1]} |f(x) - g(x)| < r\}$

On prend $f(x) = g(x) + r/2$ alors $f(x) \in B_\infty(g, r)$

et $f(0) = r/2 \neq 0$ donc $f \notin A$

d'où $\mathring{A} = \emptyset$ pour $\|\cdot\|_\infty$

- Soit $g \in \mathring{A}$, $\exists r > 0$ tel que $B_1(g, r) \subseteq A$

avec $B_1(g, r) = \{ f \in E : \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx < r \}$

On prend $f(x) = g(x) + r/2$ alors $f(x) \in B_1(g, r)$

et $f(0) = r/2 \neq 0$ donc $f \notin A$

d'où $\mathring{A} = \emptyset$ pour $\| \cdot \|_1$