Normes sur $\ell^2(\mathbb{R})$

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \Big\{ \overset{= x(n)}{(x_n)} \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} : \sum_{n \geq 0} x_n^2 < +\infty \Big\}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 \right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|$$

1. Normes ? direct

Inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$: Cauchy-Schwarz

2. Montrer $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

Puisque $\sum_{n \geq 0} x(n)^2 < +\infty \Rightarrow x(n) \to 0$

$\Rightarrow \sup |x(n)| = \max |x(n)|$

$\Rightarrow \exists n_0$ avec $\|x\|_\infty = |x(n_0)|$

On a $\|x\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} x(n)^2 = x(n_0)^2 + \sum_{n \neq n_0} x(n)^2$

$\geq x(n_0)^2$

$\Rightarrow \|x\|_2 \geq |x(n_0)|$

$\|x\|_\infty$

3. $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ équivalents ?

On considère $(x_k) \in \ell^2(\mathbb{R})$ avec $\begin{cases} x_k(n) = 1 & \text{si } n \leq k \\ x_k(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Supposons que les normes sont équivalentes : $\exists C > 0$ avec $\|x\|_2 \leq C\|x\|_\infty \quad \forall x \in \ell^2(\mathbb{R})$

On a $\|x_k\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} x_k(n)^2 = \sum_{n \leq k} 1 + \sum_{n > k} 0 = k+1$

$\|x_k\|_\infty = 1$

d'où on a $\sqrt{k+1} \leq C \quad \forall k \geq 1$

impossible

Donc $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes