$(E) \quad y''' + 3y'' - 4y = 0$

On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ $\quad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -3y'' + 4y \end{pmatrix}$

donc Y est solution $Y' = MY$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Il faut résoudre cette équation

les solutions sont de la forme $Y(t) = k e^{Mt}$

Il faut calculer e^{Mt}

On cherche à diagonaliser M.

• polynôme caractéristique

$$C_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 4 & 0 & -3-X \end{pmatrix}$$

$$= X^3 + 3X^2 - 4$$

$$= (X-1)(X+2)^2$$

Une racine simple : 1

Une racine double : -2

• Pour la valeur propre 1, on trouve le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Pour la valeur propre -2, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(Av = -2v)$$

On trouve que l'ensemble des solutions est de dim. 1 avec pour base $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ // non diagonali.

On cherche v tel que $(A-\lambda I)v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda = -2 \quad \lambda = 1$

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et on a

$$A = PJP^{-1} \text{ avec } J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Il faut calculer

$$e^{Jt} = \sum_{n \geq 0} \frac{(Jt)^n}{n!}$$

On montre par récurrence

$$(Jt)^n = \begin{pmatrix} (-2t)^n & n(-2)^{n-1}t^n & 0 \\ 0 & (-2t)^n & 0 \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

et donc

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\| \\ e^{-2t}}}{\sum \frac{(-2t)^n}{n!}} & \sum \frac{n(-2)^{n-1} t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \underset{\substack{\| \\ e^{-2t}}}{\sum \frac{(-2t)^n}{n!}} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\substack{\| \\ e^{t}}}{\sum \frac{t^n}{n!}} \end{pmatrix}$$

et $$\sum_{n \geq 0} \frac{n(-2)^{n-1} t^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-2t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot t$$

$$= t \sum_{n \geq 0} \frac{(-2t)^n}{n!} = t e^{-2t}$$

On a finalement

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Les solutions $Y = P^{-1} e^{tJ} P k$ $\quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$

Il faut calculer P^{-1}

En fait, $Y = \begin{pmatrix} y \\ * \\ * \end{pmatrix}$

et en faisant le calcul, on trouve

$$y(t) = \frac{1}{9}\left(2te^{-2t} + e^{-2t} + 8e^{t}\right)k_1 + \frac{1}{9}te^{-2t}k_2 - \frac{1}{9}\left(te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{t}\right)k_3$$

avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$