$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $\quad \forall x \neq 0,\ x \cdot f(x) < 0$

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad y_0 > 0$$

1. Montrer unique solution max. (y, J)

<u>Cauchy-lipschitz</u>

2. Montrer $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante

On pose $z(t) = y(t)^2$. On calcule

$$z'(t) = 2y'(t)y(t) = 2y(t)f(y(t)) < 0$$

quand $y(t) \neq 0$

et donc $z'(t) \leq 0 \quad \forall t \in J$

et z est décroissante

3. En déduire $[0; +\infty[\subseteq J$ et qu'il existe $l \geq 0$

avec $\lim_{\infty} y^2 = \ell$.

On sait déjà que $0 \in J$ car y est solution.

Supposons que $J =]\alpha ; \beta[$ avec $\beta > 0$.
(On sait que $\alpha < 0$)

On a alors par le théorème d'explosion en temps fini

$$\lim_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} |y(t)| = +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} z(t) = +\infty$

Mais c'est impossible puisque z est décroissante sur J et donc $z(t) \leq z(\alpha)$ $\forall t \in J$

donc J est de la forme $]\alpha ; +\infty[$ avec $\alpha < 0$

et donc contient $[0 ; +\infty[$.

La fonction $z(t) = y(t)^2$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$

et minorée par 0 donc z admet une limite en $+\infty$.

4. On montre $\lim_{\infty} y = 0$ ($\Leftrightarrow \lim_{\infty} z = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$)

On suppose $\ell > 0$.

(a) Montrer : $\forall t \geq 0$, $y(t) > 0$ et $\lim_{\infty} y = \sqrt{\ell}$

Supposons le contraire : $\exists t_0 \geq 0$ avec $y(t_0) \leq 0$.
Puisque $y(0) > 0$, il existe $t_1 \in]0; t_0]$ avec $y(t_1) = 0$. Donc $z(t_1) = 0$ et $z(t) = 0$ $\forall t \geq t_1$ car z est positive et décroissante. On en déduit $\ell = 0$ contradiction

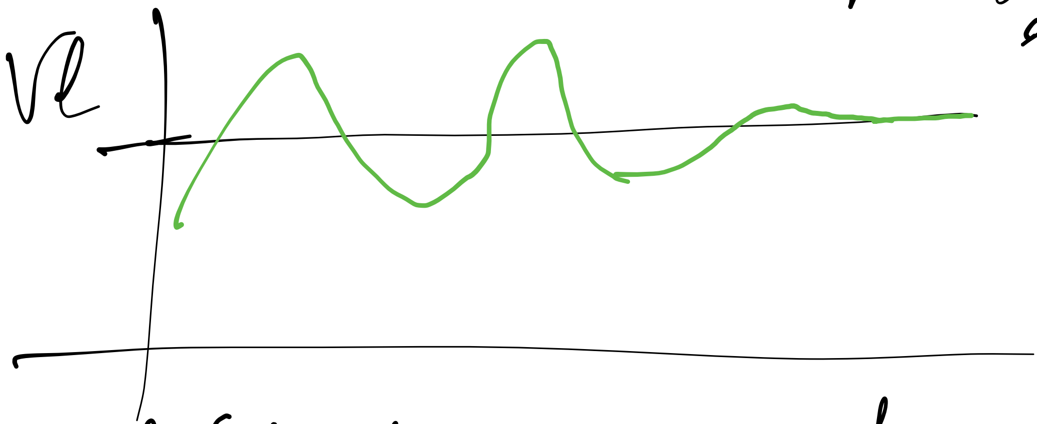
On a donc $\forall t \geq 0$, $y(t) > 0$ et donc $y(t) = \sqrt{z(t)}$ d'où $\lim_{\infty} y = \lim_{\infty} \sqrt{z} = \sqrt{\lim_{\infty} z}$

$$= \sqrt{\ell}$$

(b) Montrer y' a une limite en $+\infty$ puis $f(\sqrt{\ell}) = 0$

On a $\lim_{\infty} y' = \lim_{\infty} f(y) = f(\lim_{\infty} y) = f(\sqrt{\ell})$

On sait que $\lim_{\infty} y = \sqrt{\ell}$, il faut montrer que $\lim_{\infty} y' = 0$



Par le théorème des accroissements finis :

$\forall t > 0$, il existe $c \in [t; t+1]$ tel que

$$y'(c) = y(t+1) - y(t)$$

On fait tendre $t \to +\infty$, on en dedit

$$\lim_{\infty} y' = \lim_{\infty} y(t+1) - y(t) = \lim_{\infty} y(t+1) - \lim_{\infty} y(t) = 0$$

il faut savoir d'abord que $\lim_{\infty} y'$ existe

$c_n \to +\infty$

On considère la suite (c_n) avec $c_n \in [n; n+1]$

tel que $y'(c_n) = y(n+1) - y(n)$

alors puisque $\lim_{\infty} y'$ existe, on a

$$\lim_{\infty} y' = \lim_{\infty} y'(c_n) = 0.$$

(c) Conclure

On a $f(\sqrt{\ell}) = 0$. Donc si $\ell \neq 0$,

$\sqrt{\ell} f(\sqrt{\ell}) < 0$ avec $\sqrt{\ell} > 0$ d'où $f(\sqrt{\ell}) < 0$

<u>Contradiction</u>

Donc $\ell = 0$: $\lim_{\infty} y = 0$.

5. <u>Lemme de Gronwall</u> ...