Ex $\begin{cases} y' = -\frac{1}{t}y^2 + \frac{2}{t}y \\ y(1) = 4 \end{cases}$ $t > 0$ $I =]0;+\infty[$

1. Montrer il existe une unique solution maximale (y_0, T)

ns Cauchy-Lipschitz avec $f(t,y) = -\frac{1}{t}y^2 + \frac{2}{t}y$

est de classe $\mathcal{C}^1$ //

2. Montrer que $\forall t \in J$, $y_0(t) \neq 0$

Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ avec $y_0(t_0) = 0$, alors y_0

est solution globale $\begin{cases} y' = -\frac{1}{t}y^2 + \frac{2}{t}y & t \in J \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$

Mais la fonction nulle est aussi solution globale

or ceci est impossible car la solution globale est

unique par CL. Donc $\forall t \in J$, $y_0(t) \neq 0$.

3. On pose $z_0(t) = 1/y_0(t)$ pour $t \in J$.

Montrer z_0 solution de $z' = -\frac{2}{t} z + \frac{1}{t}$ pour $t > 0$

On calcule $z_0'(t) = -\frac{y_0'(t)}{y_0(t)^2} = -\frac{1}{y_0(t)^2}\left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } y_0 \text{ est solution}}}{-\frac{1}{t}y_0^2} + \frac{2}{t}y_0\right]$

$$= \frac{1}{t} - \frac{2}{t}\frac{1}{y_0} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t} z_0$$

4. Résoudre cette équation $z' = -\underbrace{\frac{2}{t}}\, z + \underbrace{1/t}$ $(t > 0)$

avec $z(1) = 1/4$

On utilise la formule de Duhamel

$$z(t) = \frac{1}{4} e^{\overbrace{\int_1^t -2/s\, ds}^{}_{\ln(1/t^2)}} + \int_1^t e^{\underbrace{\int_s^t -\frac{2}{\sigma} d\sigma}_{\ln(1/t^2) - \ln(1/s^2)}} \frac{1}{s}\, ds$$

$$= \frac{1}{4} e^{-2\ln t} + \int_1^t e^{-2(\ln t - \ln s)} \frac{1}{s}\, ds$$

$$= \frac{1}{4t^2} + \int_1^t \left[\frac{s^2}{t^2} \right] \times \frac{1}{s} ds$$

$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \int_1^t s ds = \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \left[\frac{s^2}{2} \right]_1^t$$

$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \times \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4t^2} = \frac{2t^2-1}{4t^2}$$

5. En deduire J et la solution y_0

On remarque que z_0 s'annule en $\pm \sqrt{2}/2$.

On a $J =]\sqrt{2}/2 ; +\infty[$ (il doit contenir 1)

et $y_0(t) = 1/z_0(t) = \dfrac{4t^2}{2t^2-1}$