Exercice :
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer f finie $\Leftrightarrow x > 0$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0;1]$

donc $f(x) = \displaystyle\int_{]0;1]} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,d\lambda(t)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $x > 0$: on a $1+t \geq 1 \quad \forall t \geq 0$

donc
$$|f(x)| \leq \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{1}{x} t^x\right]_0^1 = 1/x$$

donc $f(x)$ est finie

$\boxed{\Rightarrow}$ On montre que $f(x) = \pm\infty$ si $x \leq 0$

• $x=0$

$$f(0)=\int_0^1 \frac{t^{-1}}{1+t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \underbrace{\frac{t^{-1}}{1+t}}_{=\frac{1}{t(1+t)}}\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\underbrace{\Big[\ln|t|-\ln|1+t|\Big]_\varepsilon^1}_{=\ln 1-\ln 2-(\ln\varepsilon-\ln(1+\varepsilon))} = +\infty$$

• $x<0$: $\quad 1+t\le 2 \quad \forall t\in[0;1]$

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt \geq \lim \int_\varepsilon^1 \frac{t^{x-1}}{2}\,dt$$

$$\dots = +\infty$$

2. Montrer f est continue sur $]0;+\infty[$

Thm. $\quad f(x)=\int_I \phi(x,t)\,d\mu(t)$

$x\in\Lambda$

- $\forall x \in \Lambda$, $t \mapsto \phi(x,t)$ mesurable
- ppt $t \in I$, $x \mapsto \phi(x,t)$ continue
- Il existe $g : I \to \mathbb{R}$ intégrable avec $\forall x \in \Lambda$,

$\{ t : |\phi(x,t)| > g(t) \}$ négligeable ou encore

$$|\phi(x,t)| \leq g(t) \quad pp \text{ (pour } t)$$

ne dépend pas de x

Alors f est continue

On montre f continue sur $]0;+\infty[$ avec ce théorème. En fait, on montre f continue sur $[a;b]$ avec $[a;b] \subseteq]0;+\infty[$ //

On sait que
$$f(x) = \int_{[0;1]} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, d\lambda(t)$$

- OK
- OK
- Soit $x \in [a;b]$ et soit $t \in]0;1[$

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \leq \frac{t^{a-1}}{1+t} \quad \text{car } t \leq 1 \text{ et } x \geq a$$

$$g(t)$$ ↑ intégrable par la question précédente

donc f est continue sur $]0,+\infty[$

3. Calculer $f(x)+f(x+1)$. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x f(x)$

$$f(x)+f(x+1) = 1/x$$

par continuité de f

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 - x f(x+1)\right) = 1 - 0 \times f(1) = 1$$