Exercice

$f : [0; \pi/2] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin(x)^2 & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1. Montrer f est intégrable

$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\qquad \mathbb{Q}$ mesurable / négligeable

$$f(x) = \sin(x)\, \chi_{\mathbb{Q}}(\cos(x)) + \sin(x)^2 \left(1 - \chi_{\mathbb{Q}}(\cos(x))\right)$$

Comme $\cos, \sin, \chi_{\mathbb{Q}}$ sont (mesurables) boréliens,

on a f mesurable

On considère $\displaystyle\int_{[0;\pi/2]} |f| \leq \int_{[0;\pi/2]} 1 = \pi/2$

donc f est intégrable

2. Calculer $\int_{[0;\pi/2]} f$

On a $f(x) = \sin(x)^2$ pp. En effet

$$\{x \in [0;\pi/2] \mid f(x) \neq \sin(x)^2\} = \underbrace{\cos^{-1}(\mathbb{Q}) \cap [0;\pi/2]}_{\text{dénombrable donc négligeable}}$$

$$\int_{[0;\pi/2]} f \, d\lambda = \int_{[0;\pi/2]} \sin(x)^2 \, d\lambda = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \, dx \, \dots = \frac{\pi}{4}$$

fonction continue sur intervalle compact