(X, μ) mesuré $\qquad f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-intégrable

$$\left(\left|\int f \, d\mu\right| < +\infty \right)$$

1. Montrer que f est finie μ-pp

On doit montrer que $A = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ est négligeable. On pose pour $n \geq 1$

$$\boxed{A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}}$$ suite ↘

et donc $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$.

On a $\mu(A_1) < +\infty$ sinon puisque $|f(x)| \geq 1$ $\forall x \in A_1$, on a

$$\int_X |f(x)| \geq \int_{A_1} |f(x)| \geq \int_{A_1} 1 = \mu(A_1)$$

et $\int |f| < +\infty$ puisque f est intégrable

On a donc $\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.

Pour $x \in A_n$, on a $|f(x)| \geq n$

donc $n.\mu(A_n) = \int_{A_n} n \leq \int_{A_n} |f| \leq \int_X |f|$ nombre fini ne dépend pas de n

donc $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int_X |f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $\mu(A) = 0$.

2. On suppose $\int_X |f| = 0$. Montrer que $f = 0$ pp.

On pose $B = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. On doit montrer que B est négligeable.

Pour $n \geq 1$, on pose $B_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq 1/n\}$

et on a $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ $\left[B_n = f^{-1}(]-\infty, -1/n[\cup]1/n; +\infty[) \right]$

avec $B_n \nearrow$ donc $\mu(B) = \lim_{\infty} \mu(B_n)$

Pour $x \in B_n$, on a $\frac{1}{n} \leq |f(x)|$

d'où $\int_{B_n} 1/n \leq \int_{B_n} |f| \leq \int_X |f| = 0$

$$\begin{array}{c} \int_{B_n} 1/n \\ \shortparallel \\ \frac{1}{n}\mu(B_n) \end{array}$$

donc $\mu(B_n) = 0$

et $\mu(B) = 0$