Ex :

1. $A \in M_n(\mathbb{R})$

On pose $S = \dfrac{A + {}^tA}{2}$ $\quad T = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ $\quad S + T = A$

symétrique $\quad$ anti-symétrique

Supposons $A = S' + T' = S + T$

On calcule $A + {}^tA = 2S = 2S'$ donc $S = S'$

$A - {}^tA = 2T = 2T'$ donc $T = T'$

donc l'écriture est unique

2. $\max\limits_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle =$ plus grande valeur propre de S

On a $\langle x, Ax \rangle = \langle x, Sx \rangle + \langle x, Tx \rangle$

Mais $\langle x, Tx \rangle = \langle T^* x, x \rangle$ avec $T^* = {}^tT = -T$

donc $\langle x, Tx \rangle = -\langle Tx, x \rangle = -\langle x, Tx \rangle$

d'où $\langle x, Tx \rangle = 0$ et $\langle x, Ax \rangle = \langle x, Sx \rangle$

Puisque S est symétrique, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $S = PDP^{-1}$. Mais $\langle x, Py \rangle = \langle P^* x, y \rangle$

avec $P^* = {}^tP = P^{-1}$ $\qquad = \langle P^{-1} x, y \rangle$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

donc $\langle x, Sx \rangle = \langle x, Dx \rangle$
$$= d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2$$

Il reste à montrer

$$\max_{\|x\|=1} (d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2) = \overbrace{\max_i d_i}^{\text{disons } d_1}$$

On a $d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2 \leq d_1 (x_1^2 + \dots + x_n^2)$

car $d_i \leq d_1 \ \forall i$

$\leq d_1$ si $\|x\| = 1$

Pour $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|x\|^2$ et $d_1 x_1^2 + \dots + d_n x_n^2 = d_1$

donc $\max\limits_{\|x\|=1} \left(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2\right) = \lambda_1$

3. max. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$ ${}^t y A x$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + \dots + a_4^2 = 1$ ${}^t x A x$

On a $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1 = \langle x, Ax \rangle$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Donc par la question 2, la réponse est la valeur propre maximale de

$$\frac{A + {}^t A}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique $\det\left(\frac{A + {}^t A}{2} - t\,\mathrm{Id}\right)$

$= T^4 - T^2$ racines : $0, 1, -1$

Donc la réponse est 1.