$(e_1,\dots,e_n)$ famille de E $\quad \|e_i\|=1 \quad \forall i$

$$\forall x\in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 \iff (e_1,\dots,e_n) \text{ BON}$$

• $\Leftarrow$ | $\quad x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et $\langle x, e_i\rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i\rangle = \lambda_i$

puis $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \lambda_j e_j\rangle$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle e_i, e_j\rangle \underset{\uparrow \text{ car BON}}{=} \sum_i \lambda_i^2$$

$$= \sum_i \langle x, e_i\rangle^2$$

• $\Rightarrow$ | On suppose $\forall x\in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$

On montre que $(e_1,\dots,e_n)$ est orthogonale : $i\neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$

On calcule $\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 = \underbrace{\|e_i\|^4}_{\langle e_i, e_i\rangle^2} + \sum_{j\neq i} \langle e_i, e_j\rangle^2$

Puisque $\|e_i\|=1 \Rightarrow \sum_{j\neq i} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0 \Rightarrow \forall j\neq i$

$\langle e_i, e_j\rangle = 0$

Lemme : Une famille $(a_1, .., a_k)$ orthogonale avec $a_i \neq 0, \forall i$. Alors cette famille est libre

Preuve : Supposons $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ une relation.

On calcule $\langle \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k, a_i \rangle = 0$ car

orthogonale $\rightarrow$ $= \lambda_i \langle a_i, a_i \rangle$

donc $\lambda_i \langle a_i, a_i\rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ car $a_i \neq 0$. $\square$

Donc $(e_1, .., e_n)$ famille libre max. $\Rightarrow$ base + orthog. + normée. $\square$