p premier G p-groupe : G est fini et $|G| = p^e$ $e \geq 1$

1. G p-groupe. On montre que $Z(G) \neq \{e\}$

1.1 X fini avec $G \circlearrowright X$. $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$

Montrer

$$\text{card}(X) \equiv \text{card}(X^G) \pmod{p}$$

On a $\text{card}(X) = \sum_{\Omega \in X/G} \text{card}(\Omega)$ et $\text{card}(\Omega) \mid |G| = p^e$

d'où $\text{card}(\Omega) = 1$

ou

$p \mid \text{card}(\Omega)$

d'où $\text{card}(X) \equiv \sum_{\substack{\Omega \in X/G \\ \text{card}(\Omega) = 1}} 1 \pmod{p}$

$\text{card}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \Omega = \{x\}$ et $\forall g \in G, g \cdot x = x$

$\Leftrightarrow \Omega = \{x\}$ avec $x \in X^G$

d'où $\quad \mathrm{card}(X) \equiv \sum_{x \in X^G} 1 \pmod{p}$

$$\equiv \mathrm{card}(X^G) \pmod{p}$$

1.2 Action de G avec $X^G = Z(G)$?

On prend $X = G$.

On prend l'action par conjugaison : $g \in G, x \in G$

on pose : $g \cdot x = gxg^{-1}$

$x \in X^G \Leftrightarrow \forall g \in G, \ g \cdot x = x \Leftrightarrow \forall g \in G, \ gxg^{-1} = x$

$\Leftrightarrow \forall g \in G, \ gx = xg \Leftrightarrow x \in Z(G)$

Par la question 1.1, on a

$$|G| \equiv |Z(G)| \pmod{p}$$

mais $|G| \equiv 0 \ (p)$ d'où $|Z(G)| \equiv 0 \ (p)$

et $|Z(G)| \geq p > 1$ donc $Z(G) \neq \{e\}$.

2. Groupe d'ordre p (premier) $\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Résultat : G fini avec $G/Z(G)$ est cyclique.
Alors G est abélien.

Supposons que $G/Z(G) = \langle \bar{g} \rangle$.
Soient $a, b \in G$. On calcule ab.

Puisque $G/Z(G) = \langle \bar{g} \rangle$, $a = g^s z$ avec $s \in \mathbb{Z}$, $z \in Z(G)$
$b = g^t w$ avec $t \in \mathbb{Z}$, $w \in Z(G)$

On trouve $ab = g^s z g^t w = g^s g^t z w$ car $z \in Z(G)$
$= g^t g^s w z = g^t w g^s z$ car $w \in Z(G)$
$= ba$
donc G est abélien

G d'ordre p^2 : $Z(G)$ est non trivial

donc $Z(G)$ est d'ordre p ou p^2

- Si $|Z(G)| = p^2$ alors $G = Z(G)$ abélien
- Si $|Z(G)| = p$ alors $|G/Z(G)| = p$ cyclique

d'où G abélien.

On montre $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$