Théorème de Cayley : G d'ordre n, alors G iso à un sous-groupe de S_n

Preuve : $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ on numérote les éléments de G

On fait agir G sur lui-même par mult. à gauche :
$g \in G$, on définit $\pi_g : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ vérifiant

$i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad g g_i = g_{\pi_g(i)}$

alors $\pi_g \in S_n$ (bijection d'inverse $\pi_{g^{-1}}$)

et $g \overset{\varphi}{\mapsto} \pi_g$ morphisme $\quad \pi_{gg'} = \pi_g \circ \pi_{g'}$

Donc $G/\mathrm{Ker}\,\varphi \simeq \mathrm{Im}\,\varphi \leftarrow$ sous-groupe de S_n

$g \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Leftrightarrow \pi_g = \mathrm{id}_{S_n} \Leftrightarrow \forall i,\ g g_i = g_i$

$\Leftrightarrow g = e$

d'où $G \simeq \operatorname{Im} \varphi$