Ex G groupe cyclique d'ordre n

- Soit $d \geq 1$. Combien d'éléments d'ordre d dans G ?
  - Si $d \nmid n$, c'est 0 (th. de Lagrange)
  - Si $d \mid n$, on peut supposer $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Pour $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'ordre de $\bar{m}$ est $\frac{n}{(m,n)}$

donc on doit trouver le cardinal

$$\left\{ 0 \leq m \leq n-1 \;\middle|\; \frac{n}{(m,n)} = d \right\}$$

On écrit $\boxed{n = de}$, on a $\frac{n}{(m,n)} = d \iff (m,n) = e$

Rappel : $(a,b) = d \iff d \mid a,\ d \mid b$ et $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

$$\mathrm{card}\left\{ 0 \leq m \leq n-1 \;\middle|\; e \mid m \ \&\ \left(\frac{m}{e}, d\right) = 1 \right\}$$

On pose $m = ef$, on doit trouver

$$= \mathrm{card}\,\{0 \leq ef \leq n-1 \mid (f,d)=1\}$$

$$= \mathrm{card}\,\{0 \leq f \leq d-1 \mid (f,d)=1\} = \varphi(d)$$

Il y a $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.

Montrer $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ ← somme sur les entiers $d \geq 1$ avec $d|n$

$$G = \bigcup_{d|n} \{a \in G \text{ d'ordre } d\}$$ union disjointe

$$\leadsto \quad |G| = \sum_{d|n} \mathrm{card}\,\{a \in G \text{ d'ordre } d\}$$

$$\boxed{n = \sum_{d|n} \varphi(d).}$$