G monogène : $\exists\, g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$
$= \{ g^e : e \in \mathbb{Z} \}$

On considère $f : \mathbb{Z} \to G$, $e \mapsto g^e$ morphisme surjectif

donc

$$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker} f \simeq G.$$

- G infini : $\forall e \geq 1,\ g^e \neq 1_G$
  $\Updownarrow$
  g d'ordre infini

  d'où $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

  donc $\mathbb{Z} \simeq G$

- G fini $\Longleftrightarrow$ g d'ordre fini : $n =$ ordre g

  $e \in \mathrm{Ker} f \Longleftrightarrow g^e = 1_G \Longleftrightarrow n \mid e$

  d'où $\mathrm{Ker} f = n\mathbb{Z}$

  d'où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq G$.