1. (X,d) espace métrique F, G fermés, non vides, disjoints

$$\phi : x \mapsto \frac{d(x,G)}{d(x,F)+d(x,G)}$$ avec $d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$

Montrer : ϕ continue, $\phi_{|F} = 1$, $\phi_{|G} = 0$

Les deux derniers points sont triviaux / ϕ est bien définie car F et G sont fermés disjoints

On montre que la fonction

$$d_A : x \mapsto d(x,A) \text{ est continue } (A \subseteq X)$$

En fait, on montre d_A lips. Soit $y \in X$, on a $\forall a \in A$,

$$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$$

et donc $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$

On en déduit $|\underbrace{d(x,A) - d(y,A)}_{d_A(x) - d_A(y)}| \leq d(x,y)$

donc d_A est lips. donc continue donc ϕ est continue

2. A mesurable : $\exists F$ fermé, $\exists U$ ouvert avec

$$F \subseteq A \subseteq U \text{ et } \lambda_1(U \setminus F) < \varepsilon$$ || admis

$X = [0;1]$

On applique la question 1 avec $F = F$ (fermé) et $G = [0;1] \setminus U$ (fermé), on obtient ϕ continue sur $[0;1]$ avec $\phi = \chi_A$ sur $F \cup G$. On prend $B = [0;1] \setminus (F \cup G)$

Il reste à montrer $\lambda_1(B) < \varepsilon$.

On calcule
$$\begin{aligned}
\lambda_1(B) &= \lambda_1([0;1] \setminus (F \cup G)) \\
&= 1 - \lambda_1(F \cup G) \\
&= 1 - \lambda_1(F) - \lambda_1(G) \\
&= 1 - \lambda_1(F) - (1 - \lambda_1(U)) \\
&= \lambda_1(U) - \lambda_1(F) = \lambda_1(U \setminus F) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

$G = [0;1] \setminus U$

3. On montre le résultat pour f étagée.

Disons
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$
$a_i \in \mathbb{R}$

A_i mesurable

Par la question précédente, il existe $\forall i$, un borélien $B_i \in [0;1]$ tel que χ_{A_i} continue sur $[0;1] \setminus B_i$ et $\nu_1(B_i) < \varepsilon/n$.

On pose $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ alors $\nu_1(B) < \varepsilon$

et f est continue sur $[0;1] \setminus B$ car c'est une combinaison linéaire de fonctions continues

4. Th. Egoroff : $(X, \mathcal{T}, \mu)$ mesuré avec $(f_n) \to f$ simplement. Alors, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $B \in \mathcal{T}$ avec $\mu(B) < \varepsilon$ et $\underline{(f_n) \to f}$ unif. sur $X \setminus B$.

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables avec $f_n \to f$ simplement.

$\forall n \geq 1$, on peut trouver B_n mesurable avec f_n continue sur $[0;1] \setminus B_n$ et $\nu_1(B_n) < \varepsilon/2^{n+1}$

On pose $B' = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ donc les (f_n) sont continues sur $[0;1] \setminus B'$ et $\nu_1(B') < \sum_{n \geq 1} \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon/2$

Par le théorème d'Egoroff, il existe B'' mesurable avec $(f_n) \to f$ unif. et $\nu_1(B'') < \varepsilon/2$

On pose. $B = B' \cup B''$. On a $\nu_1(B) < \varepsilon$ et sur $[0;1] \setminus B$, les f_n sont continues et conv. unif. vers f donc f est continue sur $[0;1] \setminus B$.