(f_n) mesurables $\qquad A = \{x \in X : (f_n(x)) \text{ converge}\}$

Montrer : A mesurable et $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \lim f_n(x)$ est mesurable

Les fonctions $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables

et

$$A = \{x \in X : \underbrace{\liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)}_{(\liminf f_n - \limsup f_n)(x) = 0}\}$$

avec convention $+\infty - (+\infty) = -\infty - (-\infty) = 0$

On considère la fonction $g : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $(x, y) \mapsto x - y$ avec les conventions ci-dessus

g est mesurable (borélienne)

La fonction $h : X \to \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$

$$x \mapsto (\liminf f_n(x), \limsup f_n(x))$$

mesurable

donc $g \circ h$ est mesurable

Il suit que $\underset{\substack{\shortparallel \\ A}}{(g \circ h)^{-1}(\{0\})}$ est mesurable

Sur A, la suite (f_n) converge (simplement) vers f

donc f est mesurable

Corollaire : Soit (f_n) suite de fonctions mesurables.

On définit $\forall x \in X$

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x) & \text{si la limite existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors f est mesurable