

Proposition (Lemme de Burnside)  $\sum_i |\text{Stab}(x_i)|!$

Pour  $g \in G$ , on pose  $X^g = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x\}$ . On a  $G \curvearrowright X$

$|G| \curvearrowright$   $\text{card}(X/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{card}(X^g)$

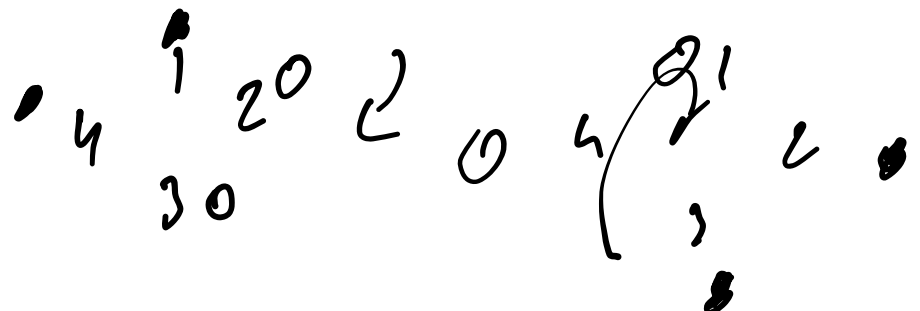
#  $X^{g_0}$   $\rightarrow$   $g_0$   
 si  $g_i \cdot x_j = x_k$   $\frac{g_i}{g_j} \rightarrow 1$   
 $= x_j$   $g_b$

$2_0 \cdot \dots \cdot 2_l$

Nombre d'orbites

Problème du collier de perles.

1. Montrer qu'avec 5 perles blanches et 3 perles noires, on ne peut faire que 5 colliers différents de 8 perles.
2. Montrer que le nombre de bracelets de 5 perles qu'on peut faire en utilisant des perles rouges, vertes ou bleues est 39.



# 5. Théorèmes de Sylow

## Théorème

Soit  $G$  un groupe d'ordre  $n$ . Soit  $p$  un nombre premier. On écrit  $n = p^r \underline{m}$  avec  $p \nmid m$ .

- ▶ Il existe un sous-groupe  $P$  d'ordre  $p^r$ . On appelle un tel groupe, un  $p$ -Sylow de  $G$
- ▶ Soient  $P$  et  $Q$  deux  $p$ -Sylow, il existe  $g \in G$  tel que  $Q = gPg^{-1}$  (les  $p$ -Sylow sont conjugués deux à deux)
- ▶ Soit  $H$  un  $p$ -sous-groupe de  $G$ , alors  $H$  est contenu dans un  $p$ -Sylow
- ▶ Le nombre  $n_p$  de  $p$ -Sylow vérifie  $n_p \mid m$  et  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$

$$\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p} \text{ si } 1 \leq i \leq p-1 \quad \binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p \cdot (p-1)!}{i!(p-i)!}$$

## Corollaire

Un groupe  $G$  d'ordre  $n$  possède un élément d'ordre  $p$  si et seulement si  $p$  divise  $n$

premier

## Exemple

Soit  $G$  un groupe d'ordre  $pq$  avec  $p < q$  premiers. Alors,  $n_q \mid p$  et  $n_q \equiv 1 \pmod{q}$  d'où  $n_q = 1$ . Il suit qu'il existe un unique  $q$ -Sylow  $Q$  qui est distingué. Soit  $P$  un  $p$ -Sylow, on a  $P \cap Q = e$  et  $G = PQ$  d'où  $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .

1, 1+q > p

## Déterminer tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

Soit  $G$  un groupe d'ordre 12.

1. Déterminer les valeurs possibles pour  $n_2$  et  $n_3$ .
2. Montrer que  $G$  est abélien si et seulement si  $n_2 = n_3 = 1$ .
  - 2.1 On suppose que  $G$  est abélien. Montrer que  $G$  contient au moins un élément d'ordre 6 ou 12.
  - 2.2 En déduire la structure de  $G$  dans le cas abélien.
3. On suppose à présent que  $G$  n'est pas abélien. Montrer que si  $n_3 \neq 1$ , alors on a  $n_2 = 1$ .
4. On suppose que  $n_3 = 4$ . On considère l'action de  $G$  sur les 3-Sylow par conjugaison.
  - 4.1 Montrer que le stabilisateur d'un 3-Sylow pour cette action est lui-même.
  - 4.2 En déduire que l'action est fidèle, puis que  $G \simeq A_4$ .
5. On suppose que  $n_3 = 1$  et donc  $n_2 = 3$ . Montrer qu'on a dans ce cas

$$G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

6. (Question subsidiaire.) Montrer  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \simeq D_{12}$ .