Proposition (Lemme de Burnside)

Pour $g \in G$, on pose $X^g = \{x \in X \text{ tel que } g \cdot x = x\}$. On a

$\sum_i |\mathrm{Stab}(x_i)|$

$G \circlearrowright X$

$$\mathrm{card}(X/G) = \frac{1}{|G|} \boxed{\sum_{g \in G} \mathrm{card}(X^g)}$$

nombre d'orbites

$\# X^{g_0}$

ssi $g_i \cdot x_j = x_j$

$G \backslash X$	x_0	… x_j …	x_ℓ
g_0			
g_i		1	
g_t			

Problème du collier de perles.

1. Montrer qu'avec 5 perles blanches et 3 perles noires, on ne peut faire que 5 colliers différents de 8 perles.
2. Montrer que le nombre de bracelets de 5 perles qu'on peut faire en utilisant des perles rouges, vertes ou bleues est 39.

5. Théorèmes de Sylow

Théorème

Soit G un groupe d'ordre n. Soit p un nombre premier. On écrit $n = p^r m$ avec $p \nmid m$.

- *Il existe un sous-groupe P d'ordre p^r. On appelle un tel groupe, un p-Sylow de G*
- *Soient P et Q deux p-Sylow, il existe $g \in G$ tel que $\boxed{Q = gPg^{-1}}$ (les p-Sylow sont conjugués deux à deux)*
- *Soit H un p-sous-groupe de G, alors H est contenu dans un p-Sylow*
- *Le nombre n_p de p-Sylow vérifie $n_p \mid m$ et $n_p \equiv 1 \pmod p$*

$\binom{p}{i} \equiv 0\ (p)$ si $1 \leq i \leq p-1$ $\qquad \binom{p}{i} = \dfrac{p!}{i!\,(p-i)!}$ $\qquad p! = p \times (p-1)!$

Corollaire

Un groupe G d'ordre n possède un élément d'ordre p si et seulement si p divise n

premier

$1,\ 1+q \not\mid p$

Exemple

Soit G un groupe d'ordre pq avec $p < q$ premiers. Alors, $n_q \mid p$ et $n_q \equiv 1 \pmod q$ d'où $n_q = 1$. Il suit qu'il existe un unique q-Sylow Q qui est distingué. Soit P un p-Sylow, on a $P \cap Q = e$ et $G = PQ$ d'où $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Déterminer tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

Soit G un groupe d'ordre 12.

1. Déterminer les valeurs possibles pour n_2 et n_3.
2. Montrer que G est abélien si et seulement si $n_2 = n_3 = 1$.

   2.1 On suppose que G est abélien. Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 6 ou 12.

   2.2 En déduire la structure de G dans le cas abélien.
3. On suppose à présent que G n'est pas abélien.
   Montrer que si $n_3 \neq 1$, alors on a $n_2 = 1$.
4. On suppose que $n_3 = 4$. On considère l'action de G sur les 3-Sylow par conjugaison.

   4.1 Montrer que le stabilisateur d'un 3-Sylow pour cette action est lui-même.

   4.2 En déduire que l'action est fidèle, puis que $G \simeq A_4$.
5. On suppose que $n_3 = 1$ et donc $n_2 = 3$. Montrer qu'on a dans ce cas

$$G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

6. (Question subsidiaire.) Montrer $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \simeq D_{12}$.