Proposition

Soit F sev de E, alors $E = F \oplus F^{\perp}$. En particulier, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Le vecteur y est le projeté orthogonal *de x sur F.*

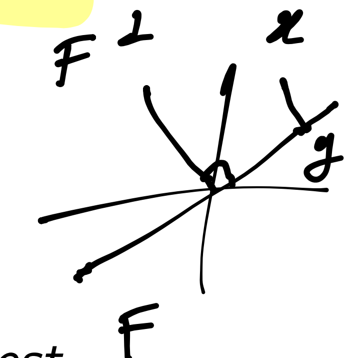
$y \perp z$

m

Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de E. Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$(*) \quad \boxed{f_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle f_j, a_i \rangle}{\|f_j\|^2} f_j} \quad \text{et} \quad \boxed{e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i.}$$



Alors la base $(f_1, \ldots, f_n)$ est orthogonale et la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée. *De plus, pour $1 \leq k \leq n$, on a*

$$\mathrm{Vec}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Vec}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vec}(e_1, \ldots, e_k).$$

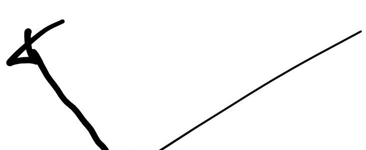
Corollaire

Soit $(u_1, \ldots, u_t)$ une base orthonormée de F. Alors le projeté orthogonale de x sur F est

$$\sum_{i=1}^{t} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Orthogonale + normé

$\|e_i\| = 1$



$E = F \oplus G$

L'application linéaire $E \to F$ qui envoie x sur son projeté orthogonal $p_F(x)$ est appelé un projecteur orthogonal.

F sur E

Problème de minimalisation. Soit $x \in E$, il existe un unique point $y \in F$ tel que la distance $\|x - y\|$ est minimale, c'est le projeté orthgonale $p_F(x)$ sur F.

Calcul du projecteur orthogonal. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit $(u_1, \ldots, u_t)$ une base orthonormée de F. Soient $U_1, \ldots, U_t$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $u_1, \ldots, u_t$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est

somme de matrices

$$\sum_{i=1}^{t} U_i \, {}^t U_i .$$

(K) $[\quad]$ ${}^t u_i$

Réciproquement, une matrice M telle que M est symétrique et $M^2 = M$ est un projecteur orthogonal.

$(p^2 = p \Rightarrow$ projection : $F = \mathrm{Im}\, p = \{pv : v \in K^n\}$

$F \cap G = \{0\}$ $E = F \oplus G$ | $G = \operatorname{Ker} n = \{ v \in \mathbb{K}^n \mid nv = 0 \}$

+ symétrique

Diagonalisation des endomorphismes normaux.

Soient E et F deux espaces euclidiens / pré-hilbertiens complexes de dim. finie. Pour $u \in \cancel{\mathcal{E}}, \mathcal{F}$, il existe un unique $u^* \in \cancel{\mathcal{F}, \mathcal{E}}$, appelé adjoint de u, tels que $\forall x \in E, y \in F$

$\mathcal{L}(F,E)$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E.$$

La matrice A^* de u^* (après choix de bases) est $\boxed{A^* = {}^t\overline{A}}$ avec A matrice de u.

$A = {}^t\overline{A}$

$A = {}^tA$

Une matrice A est

- hermitienne ou auto-adjointe si $A = A^*$ (= symétrique pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- unitaire ou orthogonale si $A^{-1} = A^*$ → réel $A^{-1} = {}^tA$ orthogonale
- (dans le cas carré) normale si $AA^* = A^*A$.

Remarque. Une matrice orthogonale est une matrice de changement de bases entre deux bases orthonormées.

toutes les racines dans $\mathbb{K}$

Théorème (Théorème spectral)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme est scindé dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice A est normale ssi elle est diagonalisable dans une base orthonormale ssi il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1} A U$ est diagonale.

En particulier, une matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.

Et, dans le cas complexe, A est hermitienne ssi ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Corollaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice hermitienne. Alors A est positive (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

- calcul poly. caract.
- calcul vp (= racines du poly. caract.)
- pour chaque vp, calculer sep correspondant $\to$ base + Gram-Schmidt

Exercice. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de vecteur de E, espace euclidien de dimension finie, tous de norme 1. Montrez qu'on a, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2,$$

si et seulement si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice. Calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx$$

Exercice.

1. Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.
2. Montrer que $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$ est égal à la plus grande valeur propre de sa partie symétrique.
3. Maximiser la quantité $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$ avec les contraintes

$$\begin{cases} a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}, \\ a_1^2 + \cdots + a_4^2 = 1 \end{cases}$$

§4. Décompositions

un seul 1 → un seul 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A admet une décomposition LU s'il existe une matrice triangulaire inférieure L avec des 1 sur la diagonale et une matrice triangulaire supérieure U telles que $\boxed{A = LU}$.

Théorème

Supposons A inversible. Alors il existe une matrice de permutations P telle que PA admet une unique décomposition LU.

$A = P^{-1} LU$

Si A est symétrique définie positive, alors A admet une unique décomposition LU.

$UX = L^{-1} Y$

$AX = Y$ pour plusieurs Y $\quad LUX = Y$

Utilisations. résolution de systèmes linéaires avec membres de droite différents, inversion de matrices, calculs de déterminants, etc.

Méthode. On fait un pivot de Gauss pour mettre sous forme triangulaire supérieure (en mettant le pivot égal à 1 à chaque fois). Les transformations effectuées donnent la matrice L. Si un pivot est nul, on échange les lignes pour avoir un pivot non nul (ce qui donne P).

Une matrice A admet une décomposition QU (ou QR) s'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = QU$.

A inv.

Particulièrement utile quand A est rectangle pour calculer le pseudo-inverse de A :

$AX = Y$

$\Updownarrow$

$X = A^{-1}Y$

$$AX = Y \iff UX = {}^tQY$$

$QUX = Y \iff UX = Q^{-1}Y$

Méthode. On fait la méthode de Gramm-Schmidt sur les colonnes a_j de A. La base orthonormée (e_i) obtenue donne la matrice Q. La matrice R a pour entrées $\langle e_i, a_j \rangle$ pour $i \leq j$ (et zéro ailleurs).

$U = R$

Remarques. La méthode est plus couteuse que la méthode LU et susceptible aux problèmes d'arrondis dans Gramm-Schmidt.

C'est la base de la méthode QR pour le calcul (d'approximations) des valeurs propres.

Exercice.

- Calculer la décomposition LU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer la décomposition QU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Lemme

Soit A un matrice (non nécessairement carrée). Alors, la matrice A^*A est hermitienne positive. En particulier, ses valeurs propres sont des réels positifs. On appelle **valeurs singulières** *de A les racines carrées des valeurs propres de A^*A.*

Remarque. si A est déjà hermitienne, on obtient les modules de ses valeurs propres.

exo.

Décomposition en valeurs singulières. Supposons que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ admette r valeurs singulières non nulles $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_r$. Alors, il existe deux matrices unitaires $U \in M_n(\mathbb{K})$ et $V \in M_m(\mathbb{K})$ telles que

$$A = V\hat{D}U^* \text{ avec } \hat{D} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

avec $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$.

§5. Normes matricielles

$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 : \exists\, c, C > 0$

$\forall x \quad c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Rappel. Puisque $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, toutes les normes sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est une norme matricielle si

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

Pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, la norme de Frobenius définie par

$$\|A\|_F = \Big(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\Big)^{1/2}.$$

est une norme matricielle. C'est une conséquence de Cauchy-Schwarz.

La norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ n'est pas une norme matricielle.

$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots |x_n|^p\right)^{1/p}$ $1 \leq p$ $\|x\|_\infty$

Pour $\|\cdot\|$ une norme fixée de $\mathbb{K}^n$, la norme subordonnée est la norme $|||\cdot|||$ de $M_n(\mathbb{K})$ définie par

$$|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

Proposition

Soit une norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{K}^n$, on a

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$: $\|Ax\| \leq |||A|||\,\|x\|$. ← déf.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, *il existe* $x \in \mathbb{K}^n$ *avec* $|||A||| = \|Ax\|$ *et* $\|x\| \leq 1$.
3. $|||\mathbf{1}_n||| = 1$.
4. *La norme subordonnée $|||\cdot|||$ est une norme matricielle.*

Remarque. Puisque $\|\mathbf{1}_n\|_F \neq 1$, la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

$\|1_n\|_F = \sqrt{n}$

Soit $|||\cdot|||_2$ la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$.

$\|\cdot\|_2$

Propriétés.

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $|||A|||_2 = |||A^*|||_2 =$ plus grande valeur singulière de A.
2. $\forall A, U \in M_n(\mathbb{K})$ avec U unitaire, $|||AU|||_2 = |||UA|||_2 = |||A|||_2$.
3. En particulier, si A unitaire, $|||A|||_2 = \rho(A)$ avec $\rho(A) = \max.$ des modules des valeurs propres de A est le rayon spectral de A.

Théorème

Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) \leq \|A\| \leftarrow \text{exo.}$$

Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\|A\|_{\underbrace{A,\varepsilon}} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

La suite $(A_k)_k$ de $M_n(\mathbb{K})$ tend vers A si on a $\|A - A_k\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_k A^k = 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\lim_k A^k x = 0$,
3. $\rho(A) < 1$,
4. *Il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ pour laquelle $\|A\| < 1$.*

x vp associé à λ

$A^\ell x = \lambda^\ell x \to 0$

$\|A^\ell\| \leq \|A\|^\ell \to 0$

Remarque. Soit $\sum_k a_k z_k$ une série entière de rayon de convergence R, on en déduit que la même série converge pour une matrice A avec $\rho(A) < R$. Cela permet de construire l'analogue des fonctions classiques exp, cos, sin...

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle. On a

$$\lim_k \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

valeur propre de Frobenius

Théorème (Perron-Frobenius)

$\geqslant 0$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice à coefficients positifs. Alors, il existe une valeur propre λ_F de A telle que

1. *λ_F est réelle et positive (ou nulle),*
2. *$\forall \lambda$ valeur propre de A, $|\lambda| \leq \lambda_F$ donc $\lambda_F = \rho(A)$.*

Si de plus on a $A^k > 0$ pour un entier $k \geq 1$, alors

1. *λ_F est strictement positive,*
2. *λ_F admet un vecteur propre à coordonnées strictement positives,*
3. *$\forall \lambda$ valeur propre de A, $\lambda \neq \lambda_F \implies |\lambda| < \lambda_F$,*
4. *λ_F est de multiplicité 1 (racine simple du polynôme caractéristique).*

$\hookrightarrow$ sep dim. 1