## Définition

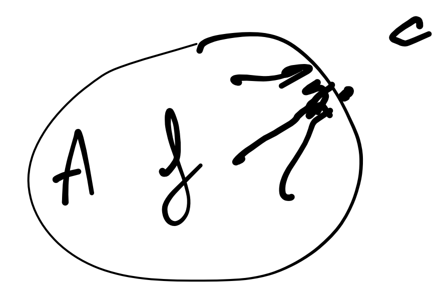
Soient $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $a \in \bar{A}$ et $b \in B$. On dit que $f$ tend vers $b$ quand $x$ tend vers $a$ ou la limite de $f$ en $a$ est $b$, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \ 0 < d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), b) < \epsilon$$

$|x-a|$

**Résultat.** On a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ssi $\lim\limits_{n} f(x_n) = b$ pour tout suite $(x_n)$ de limite $a$ avec $x_n \neq a$ $\forall n$

**Résultat.** $f$ est continue en $a$ ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$




## Théorème (Prolongement par continuité)

*Soit $A \subseteq X$ et $f : A \to Y$. Soit $c \in \bar{A} \setminus A$ tel que $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe. On définit $g : A \cup \{c\} \to Y$ par*

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A \quad \text{et} \quad g(c) = \lim_{x \to c} f(x).$$

*Alors, $g$ est continue en $c$.*

## Définition

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $X$ vers $Y$ et soit $f : X \to Y$.

- $(f_n)$ converge simplement vers $f$ si $\forall x \in X$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$, ie

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

$N(x, \varepsilon)$

- $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

$N(\varepsilon)$

## Théorème

*Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues de $X$ vers $Y$ qui converge uniformément vers $f : X \to Y$. Alors, $f$ est continue.*

## Théorème

*Soit $f : X \to Y$ une application linéaire entre deux evn (espaces vectoriels normés) alors $f$ est continue ssi $f$ est continue en $0$ ssi $f$ est lipschitzienne ssi $\exists M > 0, \forall x \in X, \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.*

*Dans ce cas, le plus petit $M$ qui convient est la norme subordonnée de $f$, dénotée $|||f|||$.*

$|||f|||$

$\|\cdot\|, \|\cdot\|$

$\|f(x)\|_Y$

## Théorème

*Soit $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ (= ensemble des applications linéaires continues), on a*

- $\forall x \in X,\ \|f(x)\|_Y \leq |||f||| \cdot \|x\|_X$
- $$|||f||| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\leq 1}} \|f(x)\|_Y = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|f(x)\|_Y$$
- *Soit $g \in \mathcal{L}(Y,Z)$, on a $|||g\circ f||| \leq |||g|||\ |||f|||$*

**Résultat.** $\mathcal{L}(X,Y)$ avec la norme $|||\cdot|||$ est un evn

## Définition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques $f : X \to Y$ est une bijection telle que $f$ et $f^{-1}$ sont continues. Dans ce cas, on dit que $X$ et $Y$ sont homéomorphes.

## Limite pour une distance particulière

Soit $d$ la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = |x-y|$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $\delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

   est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \geq 1}$ pour cette distance.

## Calcul de normes d'applications linéaires.

1. On considère l'application linéaire $\phi : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = \int_0^1 x\, u(x)\, dx.$$

   Calculer la norme de $\phi$ pour $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

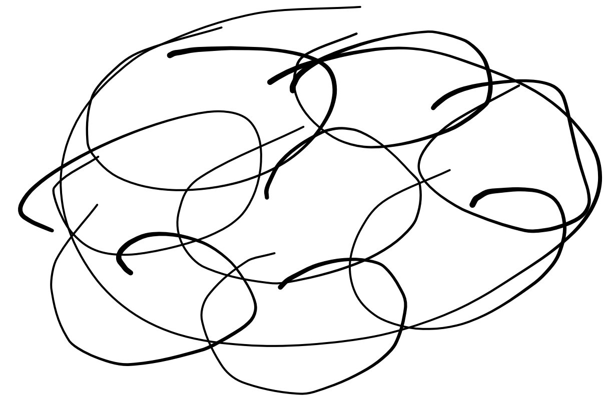
   Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

2. On considère l'application linéaire $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(P) = P'(0).$$

   Calculer la norme de $\psi$ pour $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|$.

# §1.3 Compacité



## Définition

Soit $(X, d)$ un espace métrique.

- **Propriété de Borel-Lebesgue.** Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de $X$ tels que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ (recouvrement d'ouverts), il existe $I_0 \subseteq I$ fini tel que $\bigcup_{i\in I_0} U_i = X$.
- **Propriété de Bolzano-Weierstrass.** Tout suite d'éléments de $X$ admet une sous-suite convergente.

↳ dans $X$

## Théorème

*Ces deux propriétés sont équivalentes pour un espace métrique. Un espace avec ces propriétés est un espace compact*

**Résultat.** Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés

**Résultat.** Soit $X$ un espace compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $X$. Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\exists i \in I$ avec $B(x, r) \subseteq U_i$

## Proposition

- *Un sous-espace compact d'un espace métrique est fermé*
- *Une intersection arbitraire de compacts est compacte*
- *Une union finie de compacts est compacte*
- *Un fermé d'un espace compact est compact*

## Théorème

1. **Borne atteinte.** *Soit $X$ compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f$ est bornée et elle atteint ses bornes. De plus, $f$ est uniformément continue (aussi vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $Y$ métrique).*
2. **Riesz.** *Soit $E$ un evn. Alors, $E$ est de dimension finie ssi $B_f(0, 1)$ est compacte.*
3. **Produit de compacts**. *Le produit de deux espaces compacts avec la distance produit est un espace compact*

## Proposition

*Soit $n \geq 1$, alors toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ (resp. sur $\mathbb{C}^n$) sont équivalentes*

# §1.4 Connexité

$f : X \to \{0,1\}$ continue et non constante

$f^{-1}(\{0\}) = U$ ouvert-fermé

$f^{-1}(\{1\}) = V$ ouvert fermé

$U \cap V = \emptyset$

## Définition

Soit $(X, d)$ un espace métrique. On dit que $X$ est connexe si, pour tout ouvert $U$ et $V$ avec $\underbrace{X = U \cup V \text{ et } U \cap V = \emptyset}_{V = X \setminus U \text{ fermé}}$, on a $(U, V) = (X, \emptyset)$ ou $(\emptyset, X)$.

$X = U \cup V$

## Proposition

- *$X$ est connexe ssi les seuls ouverts-fermés sont $X$ et $\emptyset$*
- *$X$ est connexe ssi toute fonction continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante*
- *L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe*
- *Soit $A \subseteq X$ connexe et $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ alors $B$ connexe*
  *En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe*
- *Le produit de deux espaces connexes est connexe*

## Théorème (Connexité dans $\mathbb{R}$)

*Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En conséquence, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et si $I$ est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires)*

$f([a;b]) = [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$

## Définition

Soit $x \in X$ espace métrique. La composante connexe $C(x)$ de $x$ est la réunion des connexes de $X$ contenant $x$. C'est le plus grand connexe contenant $x$. En particulier, $C(x)$ est fermé.

**Résultat.** On utilise : une union (arbitraire) de connexes d'intersection non vide est connexe

## Théorème

*Soient $x, y \in X$. Alors $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. En particulier, $X$ est l'union (disjointe) de composantes connexes.*

## Définition

Un chemin reliant $x$ à $y$ avec $x, y \in X$ espace métrique est une application $\gamma : [0;1] \to X$ continue avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. (On peut remplacer $[0;1]$ par un intervalle arbitraire $[a;b]$)
On dit que $X$ est connexe par arcs si, $\forall x, y \in X$, il existe un chemin reliant $x$ et $y$

**Résultat.** Connexe par arcs $\Longrightarrow$ connexe

**Résultat.** L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs

$f$

$x$

$\mathbb{R}$ non connexe par arc

$f(x)$

$\mathbb{R}^2$

connexe par arc

## Application

*Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes*

$n \neq m$ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ non homéomorphes

## Théorème

*L'adhérence de l'ensemble $\{(t, \sin(1/t)) : t \in ]0;1]\}$ est compact, connexe mais pas connexe par arcs*

# §1.5 Complétude

$x_n \to \ell$

$\exists N : \forall n \geq N \; |x_n - \ell| \leq \varepsilon/2$

$\forall m \geq N \; |x_n - x_m| \leq |x_n - \ell| + |x_m - \ell| \leq \varepsilon$

## Définition

Un suite $(x_n)$ d'un espace métrique $X$ est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n, m \geq N$, on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$

On dit que $X$ est complet si toute suite de Cauchy de $X$ est convergente

**Résultat.** Suite convergente $\implies$ suite de Cauchy

**Résultat.** Suite de Cauchy avec une sous-suite convergente est convergente (même limite)

## Théorème

- *Tout fermé d'un espace complet est complet*
- *Tout sous-espace complet est fermé*
- *Tout espace métrique compact est complet*
- *Tout evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet*

## Proposition

*L'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ avec $X$, $Y$ evn et $Y$ complet, munit de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ est complet*

## Théorème (Riesz-Fischer)

$\{(u_n) \text{ suite réelle avec } \|u_n\|_p < +\infty\}$

*Soit $p \in [1; +\infty]$. Alors $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est un evn complet avec*

$$\|(u_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } p < +\infty \\ \sup_n |u_n| & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

*et $\ell^p(\mathbb{N}) = \{$suites réelles $(u_n)$ avec $\|(u_n)\|_p < +\infty\}$.*

$X = \mathbb{Q} \quad Y = \mathbb{R}$

## Théorème

*Soit $X$ un espace métrique, il existe un unique (à isométrie près) complété $Y$ de $X$ vérifiant $X \subseteq Y$, $d_X$ restriction de $d_Y$ à $X$, $Y$ complet et $X$ dense dans $Y$.*

sur $Y_0$

$\overline{X} = Y$

$Y_0 = \{(u_n) \subseteq X : (u_n) \text{ de Cauchy}\}$

$(u_n) \sim (v_n)$ si $d(u_n, v_n) \xrightarrow[\infty]{} 0$ $\quad Y \subset Y_0/\sim$

## Théorème (Prolongement des fonctions unif. continues)

*Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques avec ~~$X$~~ $Y$ complet. Soient $S \subseteq X$, une partie dense de $X$, et $f : S \to Y$ une application uniformément continue. Alors, il existe un unique prolongement de $f$ par continuité de $X$ vers $Y$.*

↳ continue

Rappel Les applications linéaires continues sont uniformément continues.

## Théorème (Point fixe des applications contractantes)

*Soit $X$ un espace métrique. Une application $f : X \to X$ est contractante s'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \boxed{d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y).} < d(x,y)$$

*Supposons que $X$ est complet et $f : X \to X$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe $x_* \in X$ avec $f(x_*) = x_*$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_n)$ avec $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers $x_*$ géométriquement, c'est-à-dire*

$$\forall n \geq 0, \quad d(x_n, x_*) \leq \alpha^n\, d(x_0, x_*).$$

$\neq \exists \alpha \quad 0 < \alpha < 1$

avec $d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$

## Une version faible du théorème de Picard.

Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et soit $f : X \to X$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

1. Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe $z \in X$ tel que $d(z, f(z)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in X$.
3. Montrer que $z$ est l'unique point fixe de $f$.
4. Soit $x_0 \in X$. On définit une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$.
   Montrer que la suite $(d(x_n, z))_{n \geq 0}$ converge vers $\ell \geq 0$
5. Montrer que $\ell = 0$ et donc que $(x_n)$ converge vers $z$.