→ possède toujours une intégrale

Définition

Soit $f : X \to [0; +\infty]$ mesurable. On définit l'intégale de f sur X par rapport à μ par

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \int f = \sup\left\{ \int u : u \text{ étagée, positive et } u \leq f \right\}$$

On dit que f est intégrable si $\int f$ est finie.

Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on dit que f a un intégrale si $\int f_+ - \int f_-$ a un sens où $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = max(-f, 0)$ sont mesurables, positives telles que $f = f_+ - f_-$. Dans ce cas, on pose

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu \in \bar{\mathbb{R}}$$

On dit que f est intégrable si f_+ et f_- sont intégrables. On note $\mathcal{L}^1(X; \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables

Remarque.

f intégrable $\iff$ f a une intégrale finie $\iff$ $\int f_+ < +\infty$ et $\int f_- < +\infty$ $\iff$ $\int |f| < +\infty$

$$\int |f| = \int f_+ + \int f_-$$

Proposition

Soient f et g mesurables ayant une intégrale.

- *Si $f \leq g$ alors $\int f \leq \int g$*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$*

Définition

Soit $A \subseteq X$ mesurable et $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f a une intégrale si $\boxed{f\chi_A}$ (= extension de f à X en prenant 0 sur A^c) a une intégrale. On pose

$$\boxed{\int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu}$$

Résultat. Si A est négligeable alors $\forall f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on a $\int_A f = 0$. De même, si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable et $f = 0$ p.p. alors $\int f = 0$.

Exercice. Soient (X, μ) un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction μ-intégrable.

1. Montrer que f est finie μ-presque partout.
2. Montrer que si $\int_X |f| \mathrm{d}\mu = 0$ alors f est nulle μ-presque partout.

on ajoute les négligeables

Résultat. Soit f mesurable alors f a une intégrale pour μ ssi f a une intégrale pour $\bar{\mu}$ et, dans ce cas, les deux sont égales.

Résultat. Soient f, g mesurables et $f = g$ p.p. Si f a une intégrale alors g a une intégrale et, dans ce cas, les deux sont égales.

$\int |f| < +\infty$

Proposition

Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ intégrable. On pose $A = f^{-1}(\{\pm\infty\})$. Alors $\mu(A) = 0$. On pose $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \notin A$ et $g(x) = 0$. Alors $\int |f - g| = 0$ et donc $\int f = \int g$.

$(f(x) = \pm\infty)$

Remarque. Il suit qu'on peut toujours modifier f intégrable pour qu'elle ne prenne que des valeurs finies sans changer son intégrale.

Définition

Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable. f est intégrable ssi chaque f_i est intégrable et $\int f = (\int f_i)_i$. En particulier, si $f : X \to \mathbb{C}$ alors $\int f = \int \mathrm{Re}(f) + i \int \mathrm{Im}(f)$

Théorème (Beppo-Levi)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. On suppose que (f_n) est convergente. Alors, on a $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Résultat. Si f et g ont une intégrale et les sommes $f+g$ et $\int f + \int g$ existent. Alors, $f+g$ a une intégrale et $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Proposition

$\int |f| \leq \int g < +\infty$

- *Si f mesurable alors $|f|$ mesurable*
- *Si f a une intégrale alors* $\boxed{\left|\int f\right| \leq \int |f|}$
- ⊛ $\boxed{\textit{Si } f \textit{ mesurable et } g \textit{ intégrable avec } |f| \leq g \textit{ alors } f \textit{ intégrable}}$ ⊛
- *Si f intégrable et $\int |f| = 0$ alors $f = 0$ p.p.*
- [*Si f et g intégrables, $f \leq g$ et $\int f = \int g$ alors $f = g$ p.p.*]

$\hookrightarrow \int f \leq \int g$

~~Proposition (Inégalité de Markov)~~

~~*Soit f mesurable. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $t > 0$. Alors*~~

$$\cancel{\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p}$$

$\int_{[a,b]} f \, d\lambda$

Notation. L'intégrale de Riemann est dénotée par $\int_a^b f(x)\,dx$

$\int f$

Théorème

- *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1$*
- *Dans le cas $f : I \to \mathbb{R}$ continue avec I non compact d'extrémités $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$*
  - *f est Lebesgue-intégrable ssi l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolument et dans ce cas $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*
  - *Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$* ($= +\infty$ possible)
  - *Si $\int_I f\,d\nu_1$ existe alors on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*

$\int_a^b |f|\,dx < +\infty$

Remarque. Dans le cas I non compact d'extrémités $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, il est possible que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe mais pas $\int_I f\,d\nu_1$

Notation. Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, on notera parfois $\int_I f(x)\,dx$ plutôt que $\int_I f\,d\nu_1$ (s'il n'y a pas de risque de confusion)

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad F' = f$

Théorème (Critère de Lebesgue)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ $\boxed{\text{ssi}}$ f est bornée et l'ensemble des discontinuités de f est ν_1-négligeable.

Résultat. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable alors f est Lebesgue-intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1$.

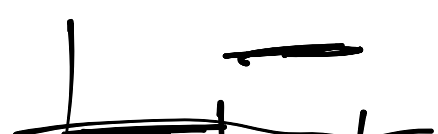
Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable. On pose $F(x) = \int_{[a,x]} f\,d\nu_1$. Alors F est dérivable ν_1-p.p. et pour $F'(x) = f(x)$ ν_1-p.p.

Théorème (Leibniz-Newton pour l'intégrale de Lebesgue)

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ avec F' ν_1-intégrable. Alors, $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)\,d\nu_1(t)$.

Remarque. Ce résultat n'est pas forcément vraie si on suppose juste F dérivable ν_1-p.p (exemple : $F(x) = 0$ sur $[0,1/2]$ et $= 1$ sur $]1/2,1]$) et même avec F continue (on peut construire F continue avec $F' = 0$ p.p.)



$1/2$

- On considère la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est Lebesgue-intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer l'intégrale de Lebesgue $\int_{[0;\pi/2]} f(x)\, d\nu_1(x)$.

- On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim_{x \searrow 0} xf(x)$.

§5 Les grands théorèmes

Théorème (Lemme de Fatou)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables* ≥ 0*, alors* $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

Théorème (Convergence dominée)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables avec* $f_n \to f$ *et telle qu'il existe* g *intégrable avec* $\forall n$, $\boxed{|f_n| \leq g}$. *Alors* f *est intégrable et* $\int |f_n - f| \to 0$ *et donc* $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

Proposition (Réciproque de la convergence dominée)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables et* f *mesurable tels que* $\int |f_n - f| \to 0$. *Alors il existe une suite extraite* (f_{n_k}) *et une fonction intégrable* g *tels que* $\forall k$, $|f_{n_k}| \leq g$ *et* $f_{n_k} \to f$ *p.p.*

Théorème (Convergence dominée p.p.)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables telle qu'il existe* g *intégrable avec* $\forall n$, $|f_n| \leq g$ *p.p et il existe* f *mesurable avec* $f_n \to f$ *p.p. Alors* f *intégrable,* $\int |f_n - f| \to 0$ *et* $\int f_n \to \int f$.

$\lim f_n$ n'existe pas

Intégrales dépendant d'un paramètre

Notation. $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ (avec $\Lambda \subseteq Y$ espace métrique). Pour $\lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, \lambda)$. De même avec $f(x, \cdot)$ pour $x \in X$.

fonction de x fonction de λ

Théorème

Supposons que

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \lambda)$ est mesurable*
2. *Pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ est continue*
3. *Il existe $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle, $\forall \lambda \in \Lambda$, $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

Alors $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu$ est continue.

$$= \int_X f(x, \lambda)\, d\mu(x)$$

Proposition

Dans le cas où Λ est un ouvert de $Y = \mathbb{R}^n$, on peut remplacer la condition 3 par

3'. *Pour toute boule fermée $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$, il existe une fonction intégrable g telle que $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$, $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

On suppose Λ ouvert de $Y = \mathbb{R}^n$. Pour la variable $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda$, on dénote par $\partial_j = \frac{\partial}{\partial \lambda_j}$ la dérivée partielle

$\int_X f(x,\lambda)\, d\mu(x)$

Théorème

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est intégrable*
   Donc la fonction $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu$ existe
2. *Pour tout $x \in X$, la fonction $\partial_j f(x, \cdot)$ existe*
3. *Pour toute boule fermée $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$, il existe une fonction intégrable g telle que $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$, $|\partial_j f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

Alors $\partial_j F$ existe et $\partial_j F(\lambda) = \int \partial_j f(\cdot, \lambda)\, d\mu$

fonction de x

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que $\boxed{\sum_n \int |f_n| < +\infty}$.
Alors $\sum_n f_n(x)$ converge p.p. et $\sum_n \int f_n = \int f$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \sum_n f_n(x) & \text{si la série converge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice.

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on peut écrire $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$. Et pour $x = 0$?
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice. Pour $y \geq 0$, on pose $F(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1 + x^2}\, dx$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y \to \infty} F(y)$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide du nombre $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.
5. En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ pour $y > 0$.
6. En déduire la valeur de I.