§2. Formes bilinéaires et formes quadratiques

Forme bilinéaire : application $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable. L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension n^2.

$\phi(x+x', y) = \phi(x,y) + \phi(x',y)$

Sur $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, base de E, on écrit $x = \sum_i x_i\, e_i$, et $y = \sum_i y_i\, e_i$. On a

$x_i, y_j \in \mathbb{K}$

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(e_i, e_j) = \boxed{{}^t X\, A\, Y}$$

$\phi(\lambda x, y) = \lambda \phi(x,y)$

avec $A = (\phi(e_i, e_j)) \in M_n(\mathbb{K})$, matrice représentant ϕ sur la base $\mathcal{B}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base.

récipr. $f(x,y) = {}^t X A Y \Rightarrow f$ forme bilin.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base E, la matrice A' de ϕ sur la base $\mathcal{B}'$ vérifie

${}^t M$ = transposée de M

$$\boxed{A' = {}^t P A P}$$

inversible

$A = (a_{ij})$

lignes colonnes

avec P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Remarque. $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$. (Attention. notation !)

alternée $\phi(y,x)$

$\mathrm{Mat}_{E,F}(\phi)$ = matrice ϕ de E à F

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique (fbs), c'est-à-dire $\forall x, y$, $\phi(x, y) = \phi(y, x) \iff$ la matrice de ϕ (dans toute base) est symétrique. .

Pour $x, y \in E$, on dit x et y orthogonaux, noté $x \perp_\phi y$, si $\phi(x, y) = 0$.

Pour $S \subseteq E$, on pose $S^{\perp_\phi} = \{x \in E \mid \forall y \in S, \phi(x, y) = 0\}$ C'est toujours un sev de E. ← exo.

${}^tA = A$

$x \perp y$

On note $\operatorname{Ker} \phi = E^{\perp_\phi}$, c'est le noyau de ϕ.

Le rang de ϕ est $\dim E - \dim \operatorname{Ker} \phi$.

$= \phi(y, x)$

$\operatorname{Ker}\phi = \{x \in E \mid \forall y \in E, x \perp y\}$

Lemme

Soit A matrice de ϕ dans une base, alors $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} A$.

$x \perp y \iff y \perp x$

$\to \operatorname{rang}\phi = \operatorname{rang} A$

Th. du rang: $\dim \mathbb{R}^n = \operatorname{rang} A + \dim \operatorname{Ker} A$

Théorème

Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E qui est orthogonale pour ϕ, c'est-à-dire telle que $e_i \perp_\phi e_j$ pour tout $i \neq j$.

$\dim E = \operatorname{rang}\phi + \dim \operatorname{Ker}\phi$

Corollaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique, alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^tQAQ$ est diagonale

↳ fbs dans une base $\mathcal{B}$

↳ chgt

par récurrence

th

base orthogonal

de base

Exercice.

Soit la forme bilinéaire ϕ de $\mathbb{R}^3$ définie sur la base canonique par :

$$\phi(v_1, v_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

1. Calculer $\phi(z, w)$ avec $z = (2, -1, 0)$ et $w = (5, 15, 1)$.
2. Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique. Calculer $\mathrm{Ker}\,\phi$, puis son rang.
3. Écrire la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.
4. Calculer l'orthogonal $v_1^\perp$.

Vocabulaire. Soit ϕ une fbs. On définit son rang par $\dim E - \dim \operatorname{Ker} \phi$.
On dit que ϕ est

- positive si $\forall x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R})$.
- négative si $\forall x \in E$, $\phi(x,x) \leq 0$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R})$.
- définie si $\phi(x,x) = 0 \iff x = 0$.
- non dégénérée si $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$ (et dégénérée sinon).

$\phi(0,0) = 0$

$\Updownarrow$

$\phi(0,y) = 0$

$\forall y$

Lemme

Si ϕ est un fbs définie alors ϕ est non dégénérée.

$x \in \operatorname{Ker} \phi$

$\Rightarrow \forall y \quad \phi(x,y) = 0$

$\Rightarrow \phi(x,x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\phi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

est une fbs non dégénérée et non définie.

$x \in \operatorname{Ker} \phi \iff x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \iff x = 0$ non dégénérée

$\phi(1,1) = 0$

$-x_2 = 0$ $\quad \phi(x,x) = x_1^2 - x_2^2$ non définie

Forme quadratique. Application de $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire ϕ sur E avec $q(x) = \phi(x,x)$ pour tout $x \in E$. Sous forme matricielle, on a

$$\boxed{q(x) = {}^tXAX.}$$

q non linéaire

$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

Théorème

Soit q forme quadratique, alors il existe une unique fbs ϕ telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \phi(x,x)$. On l'appelle (la forme polaire) de q.

fbs

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\boxed{\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right).}$$

De plus, l'application $q \mapsto \phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev donc l'ev des formes quadratiques est isomorphe à l'ev des matrices symétriques $n \times n$.

(après choix d'une base)

Forme polynômiale. L'expression $q(x)$ est un polynôme quadratique homogène en les $x_1, \ldots, x_n$. On peut déduire l'expression de $\phi(x,y)$ (comme polynôme linéaire homogène en les $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$) par

fbs

$$\boxed{ax_i^2 \rightsquigarrow ax_iy_i \quad \text{et} \quad ax_ix_j \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}ax_iy_j + \tfrac{1}{2}ax_jy_i \quad (i \neq j)}$$

$q(x) \geq 0 \ \forall x$ $q(x) \leq 0 \ \forall x$? définie $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Vocabulaire. Une forme quadratique hérite de la terminologie de la fbs associée : rang, positive, négative, dégénérée, noyau, orthogonalité, etc.

cône isotrope

Attention. $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}\, \phi$ et non $\{x \in E \mid q(x) = 0\}$ (pas sev en général).

Orthogonalité. $x \perp_q y \iff x \perp_\phi y \iff q(x+y) = q(x) + q(y)$.

$$q(x+y) = \phi(x+y, x+y) = \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \phi(y,y)$$

$$= q(x) + q(y) + 2\phi(x,y)$$

Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit q forme quadratique sur $\mathbb{R}$. Il existe un couple d'entiers (s, t), appelé la signature de q, tel que, dans toute base orthogonale $(e_1, \dots e_n)$ pour q, on a

- $s = \#\{i : q(e_i) > 0\}$
- $t = \#\{i : q(e_i) < 0\}$

$$\boxed{E = E^+ \oplus E^- \oplus \mathrm{Ker}\, q}$$

$\cdot \forall x \in E^+, x \neq 0, q(x) > 0$

$\cdot \forall x \in E^-, x \neq 0, q(x) < 0$

De plus $s + t$ est le rang de q et donc $\dim \mathrm{Ker}\, q = \#\{i : q(e_i) = 0\}$.

Réduction des formes quadratiques. Soient q forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale,
2. La matrice de q dans $\mathcal{B}$ est diagonale,
3. L'expression de q sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

somme de carrés de formes linéaires indépendantes

$$q(x) = \sum_i d_i\, f_i(x)^2$$

$d_i = 0$ possible

avec $(f_1, \dots, f_n)$ base de E^*.

forme linéaire

Théorème. Une telle base existe toujours.

Remarques. Les bases $\mathcal{B}$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont duales et la matrice de q dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \ \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \qquad \text{rang } q \ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

s t

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut prendre $d_i \in \{0, \pm 1\}$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $d_i \in \{0, 1\}$.

Réduction de Gauss.

Réduire les formes quadratiques suivantes :

- $$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2.$$

- $$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4.$$

$\langle \lambda x, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle$

$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

§3. Espaces euclidiens, espaces pré-hilbertiens

$\langle x, x\rangle \geq 0$ $\forall x$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (espaces euclidiens) ou $\mathbb{C}$ (espaces pré-hilbertiens complexes)

Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ est produit scalaire (resp. hermitien) si elle est linéaire à gauche, définie positive et

$\forall x,$ $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$

$$\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle, \qquad \boxed{\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}}.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ fbs

$\rightsquigarrow$

On en déduit l'existence d'une norme : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$:

$\langle x, x+y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle$

- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

$\nwarrow$ inégalité triangulaire

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.