Mesure et intégration

1. Tribus et boréliens
2. Mesures
3. Fonctions mesurables
4. Intégrales
5. Les grands théorèmes
6. Mesures produit
7. Changements de variables

§1 Tribus et boréliens

X un ensemble

Définition

Un clan de X est un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X tel que

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$
2. Si $A \in \mathcal{C}$ alors $A^c \in \mathcal{C}$ $\quad (A^c = \underline{X} \setminus A)$
3. $\mathcal{C}$ stable par union finie

Une tribu est un clan aussi stable par union dénombrable.

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X et soit $Y \subseteq X$. Alors $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu de Y (idem pour un clan). C'est la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur Y.

Soit $\mathcal{T}$ une tribu fixée de X. Une partie A de X est mesurable si $A \in \mathcal{T}$.

Proposition

$$\left(\bigcup A_i\right)^c = \bigcap A_i^c$$

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X alors

- $X \in \mathcal{T}$
- *$\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable*
- $\boxed{\text{Si } A, B \in \mathcal{T}, \text{ alors } A \setminus B \in \mathcal{T}}$

$$\mathcal{T}(A) = \bigcap_{\mathcal{T} \text{ tribu avec } A \subseteq \mathcal{T}} \mathcal{T}$$

Définition

Une classe monotone $\mathcal{M}$ de X est un ensemble de parties de X tel que pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{M}$

- Si (A_n) est une suite croissante (ie $A_n \subseteq A_{n+1}$) alors $\cup A_n \in \mathcal{M}$
- Si (A_n) est une suite décroissante (ie $A_{n+1} \subseteq A_n$) alors $\cap A_n \in \mathcal{M}$

$\boxed{\textbf{Résultat.} \text{ Clan + classe monotone} \implies \text{tribu}}$ $\circledast$

$= \{ S \subseteq X \}$

Définition

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Alors il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, on l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, dénotée $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. (De même pour clan et classe monotone dénotés $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ respectivement)

Résultat. On a $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$

Théorème (Classe monotone)

Soit $\mathcal{C}$ un clan, alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$ (et donc c'est une tribu)

Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} \text{ avec } A \text{ au } \underbrace{\text{plus dénombrable ou}}_{=\text{ fini ou dénombrable}} A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

→ $\emptyset \in \mathcal{T}$ OK

→ Si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$ OK

→ stable par union dénom.

$(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$

$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}$: si $\exists i$ avec A_i^c au plus dénombrable OK

sinon $\forall i$, A_i au plus dénombrable $\Rightarrow \bigcup A_i$ apd

$[0;1] \notin \mathcal{T}$

mesurable

3. $[0;1] = \bigcup_{x \in [0;1]} \{x\}$

non mesurable

Définition

Soit X un espace métrique, la tribu des boréliens de X, dénotée $\mathcal{B}_X$, est la tribu engendrée par les ouverts de X. Les éléments de cette tribu sont les boréliens de X.

boules ouverts

Résultat. Soit Y sous-espace métrique de X alors $\mathcal{B}_Y$ est la tribu de Y induite par $\mathcal{B}_X$ sur Y

Résultat. Les intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$

Proposition

Soit X espace métrique. On a

- $\mathcal{B}_X$ *est la tribu engendré par les fermés de* X
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *est la tribu engendré par les intervalles de* $\mathbb{R}$ *et même uniquement les intervalles de la forme* $]a;+\infty[$ *avec* $a \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *est la tribu engendré par les pavés* $I_1 \times \cdots \times I_n$ *avec* I_j *intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$

Remarque. Quand X est un espace métrique, la tribu considérée sur X est par défaut la tribu des boréliens

§2 Mesures

Définition

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X. Une mesure (positive) sur X est une application $\mu : \mathcal{T} \to [0; +\infty]$ telle que

$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ d.d.d. (deux à deux disjoints) alors $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$ (propriété de σ-additivité)

union dénombrable

$\sum (\geq 0)$ converge dans $[0; +\infty]$

Exemple

On prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la mesure de comptage

$\#(A \cup B) = \#A + \#B$ si $A \cap B = \emptyset$

Définition

Une espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T}$ tribu de X et un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ avec, de plus, μ une mesure sur $\mathcal{T}$

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

σ-add.

Proposition

$A, B \in \mathcal{T}$

- *Soient A et B deux mesurables avec $A \subseteq B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonie). Si, de plus, $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$*
- *Soient $A_1, \ldots A_k$ des mesurables, alors $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ avec égalité si les A_i sont d.d.d. (deux à deux disjoints)*
- *Soient A et B deux mesurables alors*

$$\boxed{\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)}$$

- *Soit (A_n) une suite de mesurables*
  - *Alors $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ (sous-additivité)*
  - *Si $(A_n) \nearrow A$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$*
  - *Si $(A_n) \searrow A$ et $\boxed{\mu(A_0) < \infty}$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$*

$(A_n) \nearrow A$: $\forall n \quad A_n \subseteq A_{n+1}$

$A = \bigcup_n A_n$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ si $\mu(A \cup B) < +\infty$

$\forall n \; A_{n+1} \subseteq A_n$ et $A = \bigcap_n A_n$

Définition

- La mesure μ est finie si $\mu(X) < +\infty$
- La mesure μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) de mesurables avec
$$\cup_n A_n = X \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty \; \forall n$$
- La mesure μ est une mesure de probabilité si $\mu(X) = 1$
- Si X est métrique et $\mathcal{T}$ est la tribu des boréliens, la mesure μ est borélienne
- Si $X = \mathbb{R}^n$ alors μ est une mesure de Radon si μ est borélienne et $\forall K$ compact de X, $\mu(K) < +\infty$

Définition

Un partie A de X (non nécessairement mesurable) est négligeable s'il existe un mesurable B avec $A \subseteq B$ et $\mu(B) = 0$. Une mesure est complète si toutes les parties négligeables sont mesurables. Si ce n'est pas le cas, on peut construire une extension de μ en une (unique) mesure complète $\bar{\mu}$ en ajoutant les négligeables à $\mathcal{T}$ pour obtenir la tribu complétée $\bar{\mathcal{T}}$.

Une propriété $P(x)$ définie pour $x \in X$ est vraie presque partout ou vraie p.p. si l'ensemble $\{x \in X : P(x) \text{ est faux}\}$ est négligeable.

Théorème

Il existe une unique mesure ν_n *sur* $\mathbb{R}^n$ *telle que, pour chaque pavé* $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ *avec* I_j *intervalle, on a*

$$\boxed{\nu_n}(P) = \mathrm{vol}(P) = \textit{produit des longueurs de } I_j$$

On note $\boxed{\lambda_n}$ *la complétée de* ν_n *et on l'appelle la* ***mesure de Lebesgue*** *dans* $\mathbb{R}^n$*. On note* $\mathcal{L}_n$ *la complétée de* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *pour cette mesure et on l'appelle la* ***tribu de Lebesgue*** *de* $\mathbb{R}^n$*.*

On a les propriétés suivantes

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} [-n; n]$$

$\lambda_1 = \ell n$

- ν_n *est unique*
- ν_n *est une mesure de Radon et est* σ*-finie*
- ν_n *est invariante par translation,* $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\nu_n(x + A) = \nu_n(A)$

  $x + A = \{x + a : a \in A\}$
- ν_1 *est donnée par la formule suivante pour* $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\nu_1(A) = \inf\left\{ \sum_j (b_j - a_j) : A \subseteq \bigcup_j \,]a_j, b_j[\right\}$$

sur $\mathbb{R}$

dénombrable

Le but de cet exercice est d'aboutir à l'existence d'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas Lebesgue-mesurable. En particulier, A n'est pas borélienne.

1. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $b \in B$ tel que $x - b \in \mathbb{Q}$. Montrer que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) > 0$.

2. Soit B une partie de $[0,1]$ telle que $\forall x, y \in B,\ x \neq y \implies x - y \notin \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de translatés de B inclus dans $[0,2]$ et deux à deux disjoints. En déduire que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) = 0$.

3. Que peut-on dire d'une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés ci-dessus ? De quelle façon peut-on obtenir une telle partie de $\mathbb{R}$?

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

§3 Fonctions mesurables et intégrales

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

Définition

Une fonction étagée est une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$$

avec $k \geq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{T}$ et χ_A est la fonction caractéristique de A

Une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est mesurable si elle est la limite (simple) de fonctions étagées. Si X métrique et $\mathcal{T}$ tribu des boréliens, on dit que f est borélienne

On dit que la fonction $f : X \to \mathbb{R}^n$ donnée par $f = (f_1, \cdots f_n)$ est mesurable si chaque f_i est mesurable

$\forall x, f(x) \geqslant 0$

Résultat. Si f est mesurable et positive, on peut trouver une suite croissante de fonctions étagées de limite f

Remarque. Convention de calcul : $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ donc le produit est toujours défini dans $\bar{\mathbb{R}}$ (mais pas la somme)

Définition

Soit A une partie de X et $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est mesurable si A est mesurable et si $\boxed{f\chi_A}$ ($= f$ étendue à X par 0 sur A^c) est mesurable

Résultat. La fonction χ_A est mesurable ssi A est mesurable

Théorème

Soit A un mesurable de X. La fonction $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable ssi on a : $f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{T}$ et, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Proposition

- *Si X est métrique alors les fonctions continues sont boréliennes*
- *Une limite simple de fonctions mesurables est mesurable*
- *Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ borélienne et $f : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable alors $g \circ f$ mesurable*
- *Soient $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurables alors fg est mesurable, λf est mesurable ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $f + g$ mesurable là où elle est définie*

$\neq +\infty - \infty$

Proposition

- *Soient $f_1, \ldots, f_n$ mesurables alors* $\max(f_1, \ldots, f_n)$ *et* $\min(f_1, \ldots, f_n)$ *sont mesurables*
- *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables alors* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *sont mesurables*

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \textit{la suite } (f_n(x)) \textit{ converge dans } \bar{\mathbb{R}}\}.$$

Alors la partie A est mesurable et la fonction $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = \lim_n f_n(x)$ est mesurable

Exercice. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que l'ensemble des points $x \in X$ tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite est un ensemble mesurable.

Indication : On rappelle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré.

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables.

- (f_n) est de Cauchy en mesure si, $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{m,n} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

- (f_n) est de Cauchy presque uniformément si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) < \epsilon$ et (f_n) de Cauchy uniforme sur $X \setminus A$

Soit f mesurable.

- $f_n \to f$ en mesure si, $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_{n} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

- $f_n \to f$ presque uniformément si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) < \epsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $X \setminus A$

(f_n) de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \forall x, \exists N : \forall n, m \geq N$

$N(\varepsilon, x)$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-mesurable. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un borélien $B \subseteq [0,1]$ tel que $\nu_1(B) < \epsilon$ et la restriction de f à $[0,1] \setminus B$ est continue.

1. Soient F et G deux fermés non vides et disjoints d'un espace métrique (X, d). Montrer que la fonction
$$x \mapsto \frac{d(x,G)}{d(x,F) + d(x,G)}$$
est une fonction continue sur X qui vaut 1 sur F et 0 sur G.
(On rappelle que $d(x, A)$ est la plus petite distance entre x et les points de A)

2. Soit A un Lebesgue-mesurable. On admet le résultat suivant : il existe F fermé et U ouvert tels que $F \subseteq A \subseteq U$ et $\nu_1(U \setminus F) < \epsilon$. En déduire le résultat pour f la fonction caractéristique de A.

3. Montrer le résultat pour f une fonction étagée.

4. En utilisant le résultat suivant, déduire des questions précédentes le résultat en général :

   Théorème d'Egoroff. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (f_n) une suite de fonctions qui tend simplement vers f. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{T}$ avec $\mu(A) \leq \epsilon$ et (f_n) converge unif. vers f sur $X \setminus A$.

§4 Intégrales

$(X, \mathcal{T}, \mu)$ mesuré

$(-b)\chi_{A \setminus C} + (-a)\chi_{B \setminus C} + (a+b)\chi_C =$

Définition

Soit une fonction étagée $f : X \to \mathbb{R}$ de représentation $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$. On dit que la représentation est admissible si $\forall i \;\; a_i \geq 0$ (et donc $f \geq 0$). Elle est canonique si les a_i sont deux à deux distincts et les A_i sont d.d.d.

Résultat. Une fonction étagée admet une unique représentation canonique (à l'ordre près) et elle est admissible ssi $f \geq 0$.

$A \cap B = C$

$a\chi_A + a\chi_B = a\chi_{A \cup B} \;\big|\; a\chi_A + b\chi_B =$

Définition

Soit f étagée et positive de représentation canonique $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$, on définit l'intégale de f sur X par rapport à μ par

finie $\qquad a_i \geq 0$

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \boxed{\int f} = \sum_i a_i \mu(A_i) \in [0; \infty]$$

Résultat. Si f étagée et positive de représentation admissible $f = \sum_i b_i \chi_{B_i}$ alors on a $\int f = \sum_i b_i \mu(B_i)$

Définition

Soit $f : X \to [0; +\infty]$ mesurable. On définit l'intégale de f sur X par rapport à μ par

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \int f = \sup\left\{\int u : u \text{ étagée, positive et } u \leq f\right\}$$

On dit que f est intégrable si $\int f$ est finie.
Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on dit que f a un intégrale si $\int f_+ - \int f_-$ a un sens où $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = max(-f, 0)$ sont mesurables, positives telles que $f = f_+ - f_-$. Dans ce cas, on pose

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu \in \bar{\mathbb{R}}$$

On dit que f est intégrable si f_+ et f_- sont intégrables. On note $\mathcal{L}^1(X; \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables

Remarque. f intégrable $\iff$ f a une intégrale finie $\iff$ $\int f_+ < +\infty$ et $\int f_- < +\infty$ $\iff$ $\int |f| < +\infty$

Proposition

Soient f et g mesurables ayant une intégrale.

- *Si $f \leq g$ alors $\int f \leq \int g$*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$*

Définition

Soit $A \subseteq X$ mesurable et $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f a une intégrale si $f\chi_A$ ($=$ extension de f à X en prenant 0 sur A^c) a une intégrale. On pose

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f\chi_A \, d\mu$$

Résultat. Si A est négligeable alors $\forall f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on a $\int_A f = 0$. De même, si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable et $f = 0$ p.p. alors $\int f = 0$.

Exercice. Soient (X, μ) un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction μ-intégrable.

1. Montrer que f est finie μ-presque partout.
2. Montrer que si $\int_X |f| \mathrm{d}\mu = 0$ alors f est nulle μ-presque partout.

Résultat. Soit f mesurable alors f a une intégrale pour μ ssi f a une intégrale pour $\bar{\mu}$ et, dans ce cas, les deux sont égales.

Résultat. Soient f, g mesurables et $f = g$ p.p. Si f a une intégrale alors g a une intégrale et, dans ce cas, les deux sont égales.

Proposition

Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ intégrable. On pose $A = f^{-1}(\{\pm\infty\})$. Alors $\mu(A) = 0$. On pose $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \notin A$ et $g(x) = 0$. Alors $\int |f - g| = 0$ et donc $\int f = \int g$.

Remarque. Il suit qu'on peut toujours modifier f intégrable pour qu'elle ne prenne que des valeurs finies sans changer son intégrale.

Définition

Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable. f est intégrable ssi chaque f_i est intégrable et $\int f = (\int f_i)_i$. En particulier, si $f : X \to \mathbb{C}$ alors $\int f = \int \mathrm{Re}(f) + i \int \mathrm{Im}(f)$

Théorème (Beppo-Levi)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. On suppose que (f_n) est convergente. Alors, on a $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Résultat. Si f et g ont une intégrale et les sommes $f+g$ et $\int f + \int g$ existent. Alors, $f+g$ a une intégrale et $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Proposition

- *Si f mesurable alors $|f|$ mesurable*
- *Si f a une intégrale alors* $|\int f| \leq \int |f|$
- *Si f mesurable et g intégrable avec $|f| \leq g$ alors f intégrable*
- *Si f intégrable et $\int |f| = 0$ alors $f = 0$ p.p.*
- *Si f et g intégrables, $f \leq g$ et $\int f = \int g$ alors $f = g$ p.p.*

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit f mesurable. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $t > 0$. Alors

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p$$

Notation. L'intégrale de Riemann est dénotée par $\int_a^b f(x)\,dx$

Théorème

- *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1$*
- *Dans le cas $f : I \to \mathbb{R}$ continue avec I non compact d'extrémités $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$*
  - *f est Lebesgue-intégrable ssi l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolument et dans ce cas $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*
  - *Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*
  - *Si $\int_I f\,d\nu_1$ existe alors on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*

Remarque. Dans le cas I non compact d'extrémités $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, il est possible que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe mais pas $\int_I f\,d\nu_1$

Notation. Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, on notera parfois $\int_I f(x)\,dx$ plutôt que $\int_I f\,d\nu_1$ (s'il n'y a pas de risque de confusion)

Théorème (Critère de Lebesgue)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ ssi f est bornée et l'ensemble des discontinuités de f est ν_1-négligeable.

Résultat. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable alors f est Lebesgue-intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1$.

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable. On pose $F(x) = \int_{[a,x]} f\,d\nu_1$. Alors F est dérivable ν_1-p.p. et pour $F'(x) = f(x)$ ν_1-p.p.

Théorème (Leibniz-Newton pour l'intégrale de Lebesgue)

Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ avec F' ν_1-intégrable. Alors, $\forall x \in [a, b]$, $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)\,d\nu_1(t)$.

Remarque. Ce résultat n'est pas forcément vraie si on suppose juste F dérivable ν_1-p.p (exemple : $F(x) = 0$ sur $[0, 1/2]$ et $= 1$ sur $]1/2, 1]$) et même avec F continue (on peut construire F continue avec $F' = 0$ p.p.)

On considère la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est Lebesgue-intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer l'intégrale de Lebesgue $\int_{[0;\pi/2]} f(x)\, d\nu_1(x)$.

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \searrow 0} x f(x)$.

§5 Les grands théorèmes

Théorème (Lemme de Fatou)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables* ≥ 0, *alors* $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

Théorème (Convergence dominée)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables avec* $f_n \to f$ *et telle qu'il existe* g *intégrable avec* $\forall n, \ |f_n| \leq g$. *Alors* f *est intégrable et* $\int |f_n - f| \to 0$ *et donc* $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

Proposition (Réciproque de la convergence dominée)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables et* f *mesurable tels que* $\int |f_n - f| \to 0$. *Alors il existe une suite extraite* (f_{n_k}) *et une fonction intégrable* g *tels que* $\forall k, \ |f_{n_k}| \leq g$ *et* $f_{n_k} \to f$ *p.p.*

Théorème (Convergence dominée p.p.)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables telle qu'il existe* g *intégrable avec* $\forall n, \ |f_n| \leq g$ *p.p et il existe* f *mesurable avec* $f_n \to f$ *p.p. Alors* f *intégrable,* $\int |f_n - f| \to 0$ *et* $\int f_n \to \int f$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

Notation. $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ (avec $\Lambda \subseteq Y$ espace métrique). Pour $\lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x, \lambda)$. De même avec $f(x, \cdot)$ pour $x \in X$.

Théorème

Supposons que

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \lambda)$ est mesurable*
2. *Pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ est continue*
3. *Il existe $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle, $\forall \lambda \in \Lambda$, $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

Alors $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu$ est continue.

Proposition

Dans le cas où Λ est un ouvert de $Y = \mathbb{R}^n$, on peut remplacer la condition 3 par

3'. *Pour toute boule fermée $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$, il existe une fonction intégrable g telle que $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$, $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

On suppose Λ ouvert de $Y = \mathbb{R}^n$. Pour la variable $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda$, on dénote par $\partial_j = \frac{\partial}{\partial \lambda_j}$ la dérivée partielle

Théorème

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est intégrable*
   Donc la fonction $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu$ existe
2. *Pour tout $x \in X$, la fonction $\partial_j f(x, \cdot)$ existe*
3. *Pour toute boule fermée $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$, il existe une fonction intégrable g telle que $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$, $|\partial_j f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

Alors $\partial_j F$ existe et $\partial_j F(\lambda) = \int \partial_j f(\cdot, \lambda)\, d\mu$

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que $\sum_n \int |f_n| < +\infty$.
Alors $\sum_n f_n(x)$ converge p.p. et $\sum_n \int f_n = \int f$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \sum_n f_n(x) & \textit{si la série converge} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Exercice.

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on peut écrire $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$. Et pour $x = 0$?
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice. Pour $y \geq 0$, on pose $F(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1 + x^2}\, dx$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y \to \infty} F(y)$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide du nombre $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.
5. En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ pour $y > 0$.
6. En déduire la valeur de I.

§6 Mesures produit

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés.

Définition

La tribu produit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ est la tribu de $X \times Y$ engendrée par les pavés $A \times B$ avec $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{S}$.
Pour $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, la coupe de E en $x \in X$ est $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ et la coupe de E en $y \in Y$ est $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$.

Résultat. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$

Résultat. Soit $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ alors $\forall x,\ E_x \in \mathcal{S}$ et $\forall y,\ E^y \in \mathcal{T}$

Proposition

Supposons μ et ν σ-finies alors il existe une unique mesure $\mu \otimes \nu$ sur $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$, appellée mesure produit, telle que $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$, pour $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{S}$. De plus, on a $\forall E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Résultat. Si seulement une des deux mesures est σ-finie, on a bien l'existence mais pas l'unicité (ni la deuxième propriété)

Remarque. Pour μ et ν σ-finies, on a $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu} = \overline{\mu \otimes \nu}$.

Théorème (Tonelli)

Soit $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ fonction $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$-mesurable. Alors les fonctions

$$y \mapsto \int_X f(\cdot, y)\, d\mu \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_Y f(x, \cdot)\, d\nu$$

sont mesurables (pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ respectivement) et

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f\, d\mu \otimes \nu &= \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)\end{aligned}$$

Corollaire

Soit $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable. Alors f est intégrable ssi

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$$

ce qui est bien sûr équivalent à $\int_Y \left(\int_X |f(x, y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty$

Théorème (Fubini)

Soit $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ intégrable. Alors

- *Pour presque tout $y \in Y$, la fonction $f(\cdot, y)$ est μ-intégrable*
- *La fonction g est ν-intégrable avec*

$$g(y) = \begin{cases} \int_X f(\cdot, y) d\mu & \textit{si l'intégrale existe} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

- *On a* $\displaystyle\int_{X \times Y} f \, d\mu \otimes \nu = \int_Y g \, d\nu$

(Et un énoncé analogue avec x et y échangés)

Notation. Si $B \subseteq \mathbb{R}^n$ est un borélien et $f : B \to \mathbb{R}$ a une intégrale pour la mesure de Lebesgue λ_n, on note par abus (s'il n'y pas de risque de confusion) $\int_B f \, d\lambda_n = \int_B f(x) \, dx = \int_B f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n$.

Pour $B = \mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \left(\cdots \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \right) dx_2 \cdots \right) dx_n$$

Théorème (Tonelli et Fubini, versions locales)

Soit $E \subseteq X \times Y$ mesurable et $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable.

- *(Tonelli) Supposons $f \geq 0$. Alors, $y \mapsto \int_{E^y} f(\cdot, y)\, d\mu$ est mesurable et*

$$\int_E f\, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_{E^y} f\, d\mu \right) d\nu = \int_Z \left(\int_{E^y} f\, d\mu \right) d\nu$$

  pour Z mesurable avec $Z \supseteq \{y \in Y : \exists x \in X \text{ avec } (x, y) \in E\}$
  (Et un énoncé analogue avec x et y échangés)

- *(Fubini) Supposons f intégrable. Alors, pour presque tout y, $f(\cdot, y)$ est intégrable sur E^y, la fonction g est ν-intégrable avec*

$$g(y) = \begin{cases} \int_{E^y} f(\cdot, y) d\mu & \text{si l'intégrale existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  et

$$\int_E f\, d\mu \otimes \nu = \int_Y g\, d\nu = \int_Z g\, d\nu$$

  pour Z mesurable avec $Z \supseteq \{y \in Y : \exists x \in X \text{ avec } (x, y) \in E\}$
  (Et un énoncé analogue avec x et y échangés)

Exercice.

Soit μ la mesure de comptage sur $\big([0,1], \mathscr{B}([0,1])\big)$.

1. Soit $\Delta = \big\{(x,x)\,;\, x \in [0,1]\big\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbb{R}^2$? de $[0,1]^2$?

2. Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes et les calculer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$
$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

3. Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

§7 Changements de variables

Proposition

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors, $A(E)$ est borélien ssi E est borélien et, dans ce cas, $\lambda_n(A(E)) = |\det(A)|\,\lambda_n(E)$.

Résultat. Si A est non inversible alors $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n, A(E)$ est négligeable

Définition

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\Phi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-diffeomorphisme si

- $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ a des dérivées partielles continues,
- Φ est bijective,
- Le déterminant jacobien de Φ est non nul en tout point de U

$$\det J_\Phi = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Théorème (changement de variables)

Soit $\Phi : U \to V$ *un* $\mathcal{C}^1$*-diffeomorphisme et soient* $f : V \to \bar{\mathbb{R}}$*. On pose* $g = |J_\Phi| (f \circ \Phi) : U \to \bar{\mathbb{R}}$*. Alors, on a*

- g *est borélienne ssi* f *est borélienne,*
- g *est Lebesgue-mesurable ssi* f *est Lebesgue-mesurable,*
- g *a une intégrale ssi* f *a une intégrable et on a*

$$\int_V f \, d\lambda_n = \int_U g \, d\lambda_n = \int_{\Phi^{-1}(V)} |J_\Phi| (f \circ \Phi) \, d\lambda_n$$

Corollaire

Supposons Φ *continue sur* U_1 *ouvert avec* $U_1 \supseteq U$*(et toujours* $\Phi : U \to V$ *un* $\mathcal{C}^1$*-diffeomorphisme). Soit* $E \subseteq U_1 \setminus U$ *fermé et négligeable,* $f : V \cup \Phi(E) \to \bar{\mathbb{R}}$*. On pose* $g = |J_\Phi| (f \circ \Phi) : U \cup E \to \bar{\mathbb{R}}$*. Alors, on a les mêmes résultats et*

$$\int_{V \cup \Phi(E)} f \, d\lambda_n = \int_{\Phi^{-1}(V \cup \Phi(E))} |J_\Phi| (f \circ \Phi) \, d\lambda_n = \int_{\Phi^{-1}(V)} |J_\Phi| (f \circ \Phi) \, d\lambda_n$$

Remarque. En général, on prendra $E = \partial U$ (frontière)

Coordonnées polaires

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $\Phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[,\ V = \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[\times\{0\}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d\lambda_2(x, y) = \int_{[0,+\infty[\times[0,2\pi]} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r\, d\lambda_2(r, \theta)$$

Coordonnées sphériques

$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $\Phi(r, \phi, \theta) = (r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi))$

$U =]0, +\infty[\times] - \pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$
$V = \mathbb{R}^3 \setminus \big(((0, 0) \times \mathbb{R}) \cup (]0, \infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})\big)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\, d\lambda_3(x, y, z) =$$
$$\int_{[0,+\infty[\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} f(r\cos(\phi)\cos(\theta), r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)) \cdot r^2\cos(\phi)\, d\lambda_3(r, \phi, \theta)$$

Coordonnées cylindriques

$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $\Phi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times\mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\, d\lambda_3(x, y, z) = \int_{[0,+\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \cdot r\, d\lambda_3(r, \phi, z)$$

Proposition (Comparaison avec des fonctions classiques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On se place dans l'espace métrique $\mathbb{R}^n$. Alors

- $x \mapsto 1/\|x\|^a$ *est intégrable sur* $B(0, 1) \setminus \{0\}$ *ssi* $a < n$
- $x \mapsto 1/\|x\|^a$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$ *ssi* $a > n$
- $x \mapsto 1/(\|x\|^a \,|\ln \|x\||^b)$ *est intégrable sur* $B(0, 1/2) \setminus \{0\}$ *ssi* $a < n$ *ou* ($a = n$ *et* $b > 1$)
- $x \mapsto 1/(\|x\|^a \,|\ln \|x\||^b)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2)$ *ssi* $a > n$ *ou* ($a = n$ *et* $b > 1$)

Fonction Gamma d'Euler.

On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que, $\forall x > 0, \forall y > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ_1-intégrable sur $]0;1[$.

   Pour $x > 0, y > 0$, on pose

   $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \quad \text{(fonction Bêta d'Euler)}$$

2. Soient $x > 0, y > 0$ et $I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)}\, ds\, dt$, calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbb{R}^2$: $u = t$ et $v = t + s$.
3. En calculant I d'une autre manière, établir pour $x, y > 0$, l'identité

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$