Algèbre linéaire et bilinéaire, Analyse matricielle

1. Dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Espaces euclidiens, espaces pré-hilbertiens
4. Décompositions

§1. Dualité

$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$

Notations. E espace-vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ $(= \cancel{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Une forme linéaire est application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ = vu comme $\mathbb{K}$-ev

L'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n aussi.

$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

Résultats. $\dim E = \operatorname{rang}\phi + \dim \operatorname{Ker}\phi$

- Une forme linéaire est nulle ou surjective. → $\operatorname{Im}\phi$ sev de $\mathbb{K}$
- Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan (dim. $n-1$) et la réciproque est aussi vraie. non nulle
- Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

$\forall H$ sev de E de dim $n-1$, $\exists f \in E^*$ avec $\operatorname{Ker} f = H$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les applications $e_1^*, \dots, e_n^* : E \to \mathbb{K}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$x = e_1^*(x)\, e_1 + \cdots + e_n^*(x)\, e_n$$

sont des formes linéaires. La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

$$e_j = 0 \times e_1 + \dots + 1 \times e_j + \dots + 0 \times e_n$$

Théorème

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, e_i^* est l'unique élément de E^* tel que, pour tout j, on a

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Calculer $e_i^*(x_1, \dots, x_n)$

$j = 1, \dots, n$

n équations / n variables

Théorème

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E avec $f_i = e_i^*$, $\forall i$. On l'appelle la base antiduale de la base $(f_1, \dots, f_n)$.