SÉANCE 1. AUTOUR DU TRIANGLE

Objectifs : prendre en main Geogebra*, passer en revue certaines droites et certains points remarquables d'un triangle, étudier des lieux de points*

Nous travaillerons tout le temps dans un *plan affine euclidien.*

1. Médiatrices, médianes et hauteurs — Soit ABC un triangle non aplati. On désigne respectivement par A', B' et C' les milieux des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$.

(1.1) On rappelle que la *médiatrice* du segment $[AB]$ est par définition l'ensemble des points du plan qui sont équidistants de A et de B. Nous la noterons $m_{[AB]}$.

(a) Démontrer que $m_{[AB]}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu C' de $[AB]$.

(b) Démontrer que les trois médiatrices (des côtés) du triangle ABC sont concourantes en un point O, équidistant des sommets A, B, C.

(c) Combien existe-t-il de cercles passant par trois points non alignés du plan ?

(d) Sur *Geogebra*, créer un outil construisant le centre du cercle circonscrit à un triangle donné.

(1.2) La *médiane* issue de A (resp. B, C) est par définition la droite (AA') (resp. (BB'), (CC')).

(a) À quelle(s) condition(s) sur le triangle ABC ses médianes et ses médiatrices sont-elles confondues ?

(b) Décrire la construction d'un point D du plan tel que le triangle DBC soit équilatéral.

(c) En déplaçant le point A sur le point D, qu'observe-t-on pour les médianes des triangles ABC et DBC ?

(d) Pour formaliser l'observation que l'on vient de faire :
- — justifier qu'il existe une *bijection affine* f du plan dans lui-même telle que $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(A) = D$;
- — démontrer que f transforme les médianes de ABC en les médianes de DBC.

(e) Déduire de ce qui précède que les médianes de ABC sont concourantes en un point G, appelé *centre de gravité* du triangle.

(f) Sur *Geogebra*, créer un outil construisant le centre de gravité d'un triangle.

(1.3) La *hauteur* issue de A est par définition la perpendiculaire à (BC) passant par A.

(a) À quelle(s) condition(s) sur le triangle ABC ses hauteurs et ses médiatrices sont-elles confondues ?

(b) Peut-on reproduire le raisonnement de la question 1.2 (e) pour démontrer que les hauteurs de ABC sont concourantes ? À quelle difficulté se heurte-t-on ?

(c) Changeons de stratégie et considérons le triangle $A'B'C'$.
- — Quelles sont ses hauteurs ? Sont-elles concourantes ?
- — Quelle bijection affine du plan permet de transformer le triangle $A'B'C'$ en le triangle ABC ?

Indication : on pourra observer et justifier les relations vectorielles

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

— En déduire une preuve du concours des hauteurs du triangle ABC en un point H, appelé *orthocentre* et vérifiant l'identité

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}.$$

Remarque — En particulier, les trois points G, O et H sont toujours *alignés*. La droite qui les porte, bien définie si ABC n'est pas équilatéral, est la *droite d'Euler* du triangle.

(d) Déduire également de ce qui précède l'égalité

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

Autrement dit, le point G est situé aux deux tiers de la médiane, du côté de A'.

(e) Sur *Geogebra*, créer un outil construisant l'orthocentre d'un triangle.

2. Bissectrices — Considérons toujours un triangle ABC non aplati.

(2.1) La *bissectrice intérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$ est par définition l'unique droite Δ telle que la réflexion d'axe Δ échange les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

(a) Que peut-on dire de Δ lorsque le triangle ABC est isocèle en A?

(b) Dans le cas général, décrire une méthode de construction de Δ à la règle et au compas.

(c) Démontrer que tout point de Δ est équidistant des deux droites (AB) et (AC).

(d) Que penser de l'assertion réciproque?

(2.2) La *bissectrice extérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$ est la perpendiculaire Δ' à Δ passant par A.

(a) Démontrer que $\Delta \cup \Delta'$ est précisément l'ensemble des points du plans qui sont équidistants des droites (AB) et (AC).

(b) Démontrer que les trois bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en un point I, intérieur au triangle et équidistant de ses trois côtés. Autrement dit, les projetés orthogonaux de I sur les trois côtés de ABC sont situés sur un même cercle, le *cercle inscrit* du triangle ABC.

(c) Sur *Geogebra*, créer un outil construisant le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC.

(d) Parmi les six bissectrices intérieures ou extérieures du triangle ABC, quelles autres droites sont-elles concourantes? Quels nouveaux cercles peut-on associer à ABC?

(2.3) Notons toujours Δ (resp. Δ') la bissectrice intérieure (resp. extérieure) au sommet A. Soit L le point d'intersection de Δ avec le segment $[BC]$.

(a) Construire le symétrique B' de B par rapport à la bissectrice extérieure Δ'.

(b) Démontrer l'égalité

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC}.$$

(c) La bissectrice extérieure Δ' peut-elle être parallèle à (BC)?

(d) Si Δ' n'est pas parallèle à (BC), notons L' le point d'intersection de ceux deux droites. En s'inspirant des questions précédentes, démontrer que l'on a encore

$$\frac{L'B}{L'C} = \frac{AB}{AC}.$$

3. Quelques problèmes de lieux géométriques — Considérons deux points distincts B, C dans le plan.

(3.1) Fixons un cercle $\mathscr{C}$ passant par B et C. Soit A un point de $\mathscr{C}$, distinct de B et C.

(a) Lorsque A parcourt $\mathscr{C} \setminus \{B, C\}$, quelle(s) courbe(s) le centre de gravité G du triangle ABC décrit-il ?

(b) Même question pour l'orthocentre H de ABC.

(**3.2)** Fixons maintenant une droite d, parallèle à (BC) et distincte de celle-ci. Soit A un point de d.

(a) Lorsque A parcourt d, quelle(s) courbe(s) le centre de gravité G de ABC décrit-il ?

(b) Même question pour l'orthocentre H de ABC.
Ici, après s'être fait une idée de la réponse sur Geogebra*, on pourra introduire un repère affine adapté et essayer d' obtenir un paramétrage de la courbe recherchée.*