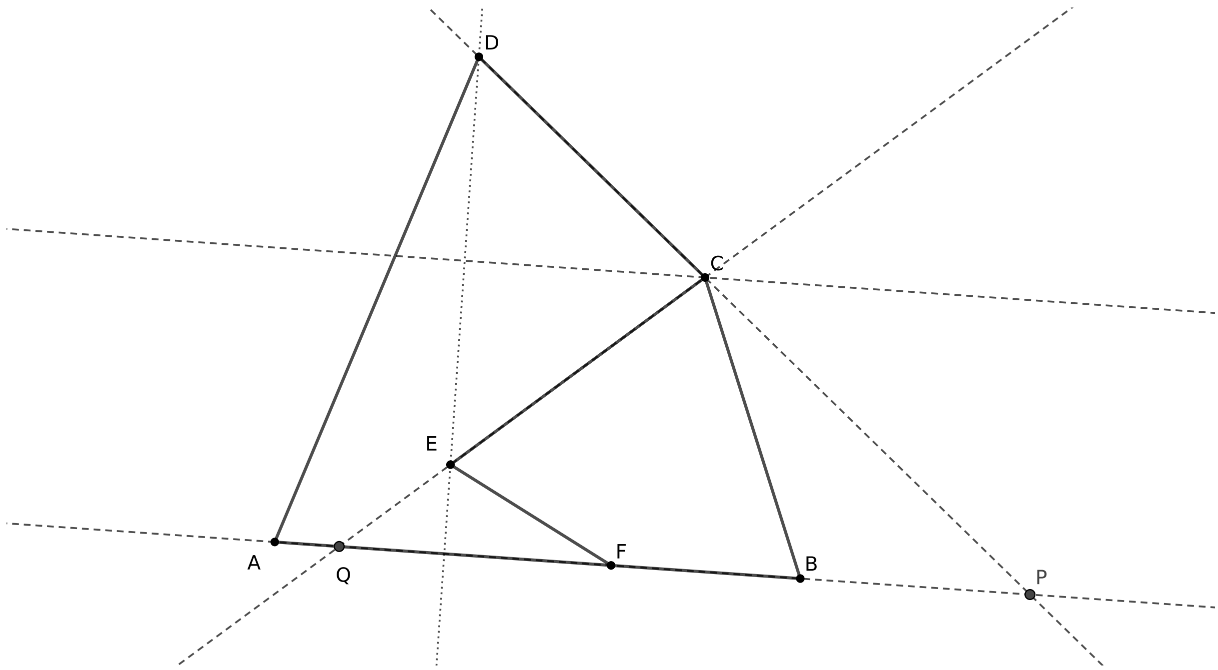
PROJET J : MÉCANISMES DE KEMPE

1. Mécanisme pour tracer un segment

Considérons la figure suivante



où $AB = AD$, $BC = CD$, $BF = EF$, $CE = BC$ et $\frac{BC}{AB} = \frac{BF}{BC}$.

1. Démontrer que les triangles ACD et ACB sont égaux.
2. Démontrer que les triangles ACB et CFB sont semblables.
3. En déduire que les angles $\widehat{APD}$ et $\widehat{CQB}$ sont égaux, puis que la parallèle à (AB) passant par C est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{DCE}$.
4. En déduire que la droite (DE) est perpendiculaire à la droite (AB).

Réalisons un mécanisme articulé reproduisant la configuration précédente. On ajoute une tige rigide $[BG]$ telle que $BG = AD$, et on fixe les points D et G de telle sorte que le quadrilatère $ADGB$ soit un parallélogramme.

4. Réaliser ce mécanisme sur *Geogebra*.
5. Animer le point A pour le faire parcourir le cercle de centre D et de rayon DG, puis afficher la trajectoire du point E. Qu'observe-t-on ?
6. *Démontrer* que la trajectoire de E est un segment perpendiculaire à (DG) dont D est l'une des extrémités.

2. Antiparallélogrammes

Considérons trois points A, B, C non alignés dans le plan, avec $AB > AC$.

1. Justifier que les cercles $\mathscr{C}(B, AC)$ et $\mathscr{C}(C, AB)$ s'intersectent en deux points D, E distincts, symétriques par rapport à la droite (BC). On note E le point situé du même côté de (BC) que A.
2. Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

Le quadrilatère $ABEC$ est un *antiparallélogramme*.

3. Démontrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BEC}$ sont égaux.
4. Démontrer que les angles $\widehat{ACE}$ et $\widehat{ABE}$ sont également égaux.
5. Sur *Geogebra*, créer un outil traçant l'antiparallélogramme $ABEC$ à partir des trois points A, B et C.
6. Considérons deux antiparallélogrammes $ABEC$ et $A'B'E'C'$ tels que

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} \quad \text{et} \quad \widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}.$$

   Démontrer que les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{A'B'E'}$ sont égaux.

   Indication : on pourra prouver que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

3. Le trisecteur

L'objectif est d'utiliser les propriétés des antiparallélogrammes que l'on vient de voir pour réaliser un mécanisme articulé permettant de diviser un angle en trois angles égaux.

1. Considérons un anti-parallélogramme $ABEC$.
   (i) Placer un point F sur $[CE]$ tel que $CF < CA$ et construire l'antiparallélogramme $CAGF$.
   (ii) Justifier que, si $CF = \frac{CA^2}{AB}$, alors $\widehat{CAG} = \widehat{BAC}$.
   (iii) En déduire la construction d'un mécanisme articulé permettant de diviser un angle en deux angles égaux.
   (*Les points B et C pourront se déplacer sur des cercles centrés en A de rayons prescrits. Leur mouvement permettra l'ouverture ou la fermeture du mécanisme.*)
2. En vous inspirant de ce qui précède, décrire la construction d'un mécanisme articulé permettant de diviser un angle en trois angles égaux.