

---

**Feuille d'exercices n° 9**  
CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

---

**Exercice 1.** Soient  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $a < b$ ,  $x_0 \in ]a, b[$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$ . On suppose que  $f$  est continue en  $x_0$  et que  $f(x_0) > 0$ . Montrer qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  inclus dans  $]a, b[$  et contenant  $x_0$ , tel que  $\forall x \in I, f(x) > 0$ .

**Exercice 2.** Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1.  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
2.  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  si  $x \neq 0$ , et  $f(0) = 1$ .
3.  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$ , et  $f(0) = 1$ , où  $E$  est la fonction «partie entière».
4.  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

**Exercice 3.**

1. Montrer que si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

alors  $f$  est surjective.

2. Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$  un polynôme de degré impair. Montrer que  $P$  admet une racine réelle.
3. Donner un exemple de polynôme à coefficients réels, de degré pair, n'admettant pas de racine réelle.

**Exercice 4.** Montrer qu'il existe  $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  tel que

$$\tan(x) + \frac{x}{3} = 0.$$

**Exercice 5.**

1. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue, telle que  $f[[0, 1]] \subseteq [0, 1]$ . Montrer que  $f$  possède un point fixe.
2. Soit  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application. On suppose que pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$  tels que  $x \neq y$ , on a  $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ . Montrer que  $g$  admet un unique point fixe.

**Exercice 6.**

1. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et périodique. Montrer que  $f$  est bornée.
2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x (\sin^8(x) + \cos^{14}(x))}.$$

**Exercice 7.** Montrer que la fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue.

**Exercice 8.** Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continues qui vérifient la condition

$$(*) : \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = f(x) f(y).$$

Soit  $f$  vérifiant (\*).

1. Montrer que :  $\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$ .
2. Quelles sont les valeurs possibles pour  $f(0)$  ?
3. On suppose qu'il existe  $x_0 \in \mathbf{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Que peut-on dire de  $f$  ?  
On suppose désormais que  $f$  ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f(n) = \alpha^n$ .
5. Montrer que :  $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = \alpha^k$ .
6. Montrer que :  $\forall r \in \mathbf{Q}, f(r) = \alpha^r$ .
7. Conclure.

**Exercice 9.** Soit  $a \in \mathbf{Z}$ . On définit  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. À quelle condition sur  $a$  la fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de  $f$  est-elle continue en 0 ?

**Exercice 10.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x \ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , et dérivable sur  $]0, 1[$ .
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?
3. Montrer qu'il existe  $c \in ]0, 1[$  tels que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 11.** Soient  $n$  un entier  $n \geq 1$  et une fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $n$  fois dérivable, et telle que  $f^{(n)}$  est continue. On suppose que  $f$  s'annule en  $n + 1$  points distincts.

Montrer que  $f'$  s'annule au moins  $n$  fois, puis que  $f^{(n)}$  s'annule au moins une fois.

**Exercice 12.** À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

**Exercice 13.** À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

**Exercice 14.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction dérivable sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = 0$ .

1. On suppose que pour  $0 \leq x \leq 1$ , on a  $f'(x) \neq 0$ . Montrer que  $f$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ .
2. On suppose de plus que  $f'$  est continue sur  $[0, 1]$ , et que  $f'(x) > 0$  pour  $x \in [0, 1]$ . Montrer qu'il existe un réel  $m > 0$  tel que pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \geq mx$ .

**Exercice 15.** Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  une fonction continue telle que  $f(x)/x$  a une limite réelle  $\ell \in [0, 1[$  quand  $x$  tend vers  $\infty$ . Montrer que  $f$  a un point fixe.

**Exercice 16.** Soit  $f$  continue sur  $\mathbf{R}_+$  telle que, pour tout réel positif  $x$ , on ait  $f(x^2) = f(x)$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 17.** Soit  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  continue et admettant une limite réelle quand  $x$  tend vers  $\infty$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+$ .

**Exercice 18.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  continue et vérifiant  $f(0) = f(1)$ .

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $a = 1/n$ . Montrer que l'équation  $f(x+a) = f(x)$  admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si  $a$  est un réel de  $]0, 1[$  qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation  $f(x+a) = f(x)$  n'ait pas de solution.

**Exercice 19.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$  telle que  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x) : x \in [a, b]\}$ . Montrer que  $f$  est affine.

**Exercice 20.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*)$  telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = 1$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**Exercice 21.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$  vérifiant pour tout  $x$  réel,  $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$ . En remarquant que  $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$ , montrer que  $f'$  est constante, puis déterminer  $f$ .

**Exercice 22.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ . (Indication : Considérer  $g(x) = e^x f(x)$ .)