
Feuille d'exercices n° 7
NOMBRES COMPLEXES

1. Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

- a) Calculer i^n , $n \in \mathbf{Z}$.
- b) Calculer $(1 + i)^8$.

Exercice 2.

- a) Écrire le conjugué de $z = \frac{4 - 5i}{3 + i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- b) Soit z un complexe. Exprimer le conjugué de $w = \frac{2z^2 - i}{5z + 1}$ en fonction de \bar{z} .

Exercice 3.

- a) Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
- b) Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

Exercice 4. On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- a) Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n et des réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Soit z un nombre complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors $P(\bar{z}) = 0$.
- b) Calculer $j\bar{j}$ et $j + \bar{j}$.
- c) En déduire $j(-1 - j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?
- d) À la lumière des questions précédentes, résoudre l'équation $z^3 = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
- e) Sans calculer $1/j$ ni j^2 , utiliser la question 4. pour justifier que $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{iz - 1}{z - i}$ soit réel.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Soient u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Exercice 10.

Soient u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1. Montrer que pour tout complexe z , le nombre complexe $\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 11.

- a) Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients dans \mathbf{C} . Pour quelle valeur de $t \in \mathbf{C}$ le polynôme $P(X+t)$ est-il de la forme

$$X^3 + 3pX + q$$

avec $p, q \in \mathbf{C}$?

Soient $p, q \in \mathbf{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3 + 3pX + q$, dite *méthode de Cardan*. On note α et β les deux racines, éventuellement égales, du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de α .

- b) Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de p et q .
 c) Démontrer que $\gamma_k - \frac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
 On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
 d) Appliquer à P le procédé de la question 1.
 e) Déterminer les racines du polynôme R déduit de P , puis celles de P , en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

2. Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- a) $\Delta_1 = 49$ b) $\Delta_2 = -25$ c) $\Delta_3 = 50i$
 d) $\Delta_4 = 3 + 4i$ e) $\Delta_5 = 8 - 6i$

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

- a) $z^2 + 2z + 10 = 0$ b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante : $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbf{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$.

- a) Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
 b) Pour $z \in \mathbf{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
 c) Résoudre l'équation.

Exercice 23. Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{18} (z - e^{2ik\pi/19})^2 = 19z^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{18} |z - e^{2ik\pi/19}|^2 = 19(1 + |z|^2).$$

5. Angles remarquables

Exercice 24. On note $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 + i$ puis l'on définit $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Écrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
- En déduire des expressions de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 25.

- Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1 + i)$.
- En déduire des expressions de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 26. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

- Quelle relation simple lie les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\omega + \frac{1}{\omega}$?
- Justifier l'identité $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 + (\omega + \frac{1}{\omega}) - 1 = 0$.
- Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

6. D'autres applications à la trigonométrie

Exercice 27. Réduction de $a \cos x + b \sin x$.

- Soient a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta).$$

- Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 28. Développer $\cos(2\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\cos(\varphi)$, puis $\sin(3\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\sin(\varphi)$.

Exercice 29. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

7. Polygones

Exercice 30. Soient u et v deux nombres complexes. Établir l'identité suivante, dite « du parallélogramme » :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Pourquoi ce nom ?

Exercice 31. Soient a, b, c et d quatre nombres complexes distincts qui vérifient les deux relations :

$$a + c = b + d \quad \text{et} \quad a + ib = c + id.$$

Que peut-on dire du quadrilatère formé des quatre points ayant ces nombres complexes pour affixes ?

Exercice 32. Soient a, b et c trois nombres complexes qui sont affixes de trois points formant dans le plan un triangle équilatéral. Montrer que :

$$\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^3 = -1.$$

Exercice 33. Soit θ un nombre réel, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

- Déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 - 2z^3 \cos \theta + 1 = 0$.
- Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles les affixes des sommets d'un hexagone régulier ?

8. Transformations affines

Exercice 34. Rappeler l'expression en terme de nombres complexes des transformations suivantes :

- La translation de vecteur $v \in \mathbf{C}$.
- L'homothétie de centre $a \in \mathbf{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbf{R}^*$.
- La rotation de centre $a \in \mathbf{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$.
- La symétrie par rapport à un axe passant par $a \in \mathbf{C}$ et faisant un angle $\theta \in \mathbf{R}$ avec l'axe réel.

Exercice 35. On rappelle l'identification canonique entre \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} via l'application affine et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array} .$$

- Identifier les transformations du plan ayant l'écriture complexe suivante :
 - $f_1(z) = z + 3 - 2i$,
 - $f_2(z) = e^{i2\pi/7}z$,
 - $f_3(z) = e^{i2\pi/3}z - 1$,
 - $f_4(z) = 3z - 5 + i$,
 - $f_5(z) = (2 + 2i)z + 3i$.
- Donner l'écriture complexe des transformations du plan suivantes :
 - La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$;
 - La symétrie centrale du centre i ;
 - La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
 - L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1 + 2i$;
 - La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1 + i$.
- Décrire géométriquement et déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes :

$$\varphi_1 : z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 3, \quad \varphi_2 : z \mapsto i\bar{z}.$$

- Démontrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
- Démontrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 36. Soit s une similitude directe telle que $s(2 - i) = 1$ et $s(-1 + 2i) = 1 + 6i$. Déterminer l'homothétie h et la rotation r telles que $s = h \circ r$. Donner l'affixe du point fixe de s .

Exercice 37. On dit qu'un ensemble d'applications E est *stable par composition* si $f \circ g \in E$ pour toutes applications $f, g \in E$. Les ensembles suivants de transformations planes sont-ils ou non stables par composition ?

- L'ensemble des translations ?
- L'ensemble des homothéties ?
- L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 ?
- L'ensemble des homothéties et des translations ?
- L'ensemble des symétries par rapport à des droites ?
- L'ensemble des rotations ?
- L'ensemble des symétries et des rotations ?
- L'ensemble des symétries, des rotations et des translations ?
- L'ensemble des similitudes directes ?

Exercice 38. On se place dans le plan complexe. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z , associe le point M_0 d'affixe $z_0 = jz + 3$.

- Déterminer les points invariants (points fixes) de r , et la nature de la transformation r .
- Soit M un point d'affixe z . Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2 .
- Soit M un point d'affixe z . Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où $r^3 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Exercice 39. On identifie \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} . On considère la transformation $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie, pour $z \in \mathbf{C}$, par

$$f(z) = 2\bar{z} + 3 - 4i.$$

- Calculer le(s) point(s) fixe(s) de f .
- Quelle est la nature de l'application f ?
- Donner une équation cartésienne du cercle C de centre $1 - i$ et de rayon 2.
- Calculer $f(1 - i)$. En déduire une équation cartésienne de l'image de C par la transformation f .

Exercice 40. Soient f et g les deux transformations du plan complexe définies par $f(z) = -z - 2i$ et $g(z) = 2z - 1 - i$.

- Déterminer les points fixes de f et g .
- Démontrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
- Démontrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
- Démontrer que ces trois centres sont alignés.

9. Quelques ensembles de points

Exercice 41. Pour chacune des relations suivantes, déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui la vérifient :

- | | | | |
|------------------------------|---|--|---|
| a) $ (1 - i)z - 3i = 3$ | b) $ 1 - z \leq 1/2$ | c) $\operatorname{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$ | d) $\operatorname{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$ |
| e) $ 1 - \frac{1}{z} ^2 = 2$ | f) $\left \frac{z-3}{z-5} \right = 1$ | g) $\left \frac{z-3}{z-5} \right = 2$ | h) $\left \frac{z-3}{z-5} \right < 2$ |

Exercice 42. Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble $\left\{ \frac{1}{1 + it}, t \in \mathbf{R} \right\}$ est contenu dans le cercle de centre $1/2$ et de rayon $1/2$. Est-ce le cercle tout entier ?